

ЗАСТОСУВАННЯ КВАЗІОРТОГОНАЛЬНИХ ПОЛІНОМІВ В ЗАДАЧАХ ОБРОБКИ ЦИФРОВОЇ ІНФОРМАЦІЇ ТА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

П'янило Я.Д.¹, Собко В.Г.², П'янило Г.М.¹

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

²Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука

Вступ. Основою отримання знань про процеси, які проходять в природі, зокрема, в спорті [3,4], є побудова адекватних математичних моделей, які повинні відповідати певним вимогам.

1. Методи моделювання мають наділяти модель здатністю відображення реально існуючого об'єкта або об'єкта, що проектується.

2. Методи моделювання мають базуватися на певних правилах, які б дозволяли встановлювати взаємооднозначну відповідність між моделлю й оригіналом.

3. Методи моделювання мають забезпечити можливість створення моделі, яка, з одного боку, була б достатньо простою, а з іншого — могла б з необхідною повнотою й достовірністю відобразити ту частину властивостей оригіналу, яка є суттєвою саме в даному дослідженні і при даній постановці задачі.

Забезпечення третьої вимоги залежить великою мірою від майстерності й досвіду дослідника, а виконання першої і другої — забезпечується теорією подібності.

Як правило, на практиці вхідною інформацією при дослідженні математичних моделей є дискретні дані, отримані з невисокою точністю в довільних точках. Результатом експериментальної роботи, зокрема, дослідження параметрів діяльності людського організму (частоти серцевих скорочень, кров'яного тиску, тощо) в процесі підготовки до змагань і в період самих змагань або теоретичних

досліджень часто є великі масиви чисельної інформації: одновимірні (сигнали), двовимірні (плоскі зображення), багатовимірні (результати зондування середовищ). Такі дані підлягають обробці, метою якої може бути: видалення шуму, згладжування інформації; виявлення особливостей інформації, пошук прихованих в ній закономірностей, дослідження частотних характеристик.

На цей час основними методами обробки числової інформації є спектральні. Вони використовуються для розв'язування широкого класу задач математики і механіки. Суть спектральних методів полягає в тому, що функції, які входять в модель, подаються у вигляді ортогональних рядів за вибраним базисом. Знаходження розв'язку в цьому випадку зводиться до обчислення коефіцієнтів ортогонального ряду шуканого розв'язку.

Поряд з ортогональними многочленами для розв'язування прикладних задач використовуються і біортогональні розклади. На цей час є незначна кількість робіт, присвячених побудові, дослідженню та використанню біортогональних розкладів. Це, в основному, пояснюється тим, що побудова біортогональних базисів пов'язана із значними обчислювальними труднощами і ці базиси є малодослідженими.

Метою роботи є побудова та дослідження властивостей оператора інтегрування типу Вольтерра в базисі многочленів Чебишева першого роду $T_j(x)$ і на цій основі побудова квазіспектральних та біортогональних поліномів. Приведено алгоритми побудови квазіспектральних поліномів, які дають можливість будувати повні біортогональні системи. Однією з позитивних властивостей біортогональних розкладів є те, що при їх застосуванні до розв'язування різного роду задач відповідні ряди мають різну швидкість збіжності. Отримані теоретичні результати апробовані в ході обчислювального експерименту на модельних задачах, досліджено вплив різного роду похибок на процес апроксимації.

Побудова квазіспектральних поліномів. На базі оператора інтегрування [1,2]

$$Lf(x) = \int_{-1}^x dx_1 \int_{-1}^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_{-1}^x (x - x_1) f(x_1) dx_1.$$

побудовано біортогональний базис з використанням многочленів Чебишева. Зокрема, доведено

Твердження 1. Якщо многочлен $\bar{U}_{2i-1}^{2s-1}(x) = \sum_{j=1}^s \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} T_{2j-1}(x)$, $i = 1, \dots, s$ такий, що

$$\int_{-1}^1 \rho(x) U_{2i-1}^{2s-1}(x) \bar{U}_{2j-1}^{2s-1}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma_{2i-1}, & i = j, \end{cases}$$

то для обчислення коефіцієнтів \bar{c}_{2j-1}^{2i-1} побудовано відповідний алгоритм.

Досліджено властивості квазіспектральних поліномів.

Обчислювальний експеримент.

Приклад 1. Нехай $\Phi(x) = \cos x - 0.5[\cos(-1) + \cos(1)]$. Знайдемо коефіцієнти та часткові суми $\Phi_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i V_i(x)$ та $\bar{\Phi}_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \bar{V}_i(x)$. Невідомі коефіцієнти ϕ_i та $\bar{\phi}_i$ знаходяться за формулами

$$\phi_i = \int_{-1}^1 \rho(x) \phi(x) \bar{V}_i(x) dx / h_{ii}, \quad \bar{\phi}_i = \int_{-1}^1 \rho(x) \phi(x) V_i(x) dx / h_{ii}.$$

Інтеграли обчислюються за допомогою квадратурних формул порядку m . У дужках $(-N)$ означає $\times 10^{-N}$. Результати обчислень подано у вигляді таблиць.

При математичному моделюванні багатьох видів спортивних змагань, зокрема, в автомобільному раллі, виникає необхідність розв'язування задач математичної фізики. Тому є сенс в проведенні апробації запропонованого способу і для вирішення таких проблем.

Приклад 1. Нехай $\Phi(x) = e^x - 0.5(e^1 + e^{-1}) - 0.5(e^1 - e^{-1})x$. Результати обчислень подані в таблицях.

Формулювання задачі. Необхідно знайти розподіл функції $f(x, t)$ для довільного часу t , $t > 0$, на проміжку $x \in [-1, 1]$, який задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = 0$$

Таблиця 1.

Значення коефіцієнтів $\bar{\varphi}_i$, обчислених за допомогою квадратурної формули порядку m та точності обчислення q .

	$m = 32$		$m = 64$	
	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$	$q = 10^{-10}$	$q = 10^{-16}$
$\bar{\varphi}_1$	-0.185516368500	-0.185516367400	-0.185516369900	-0.185516367400
$\bar{\varphi}_2$	-0.626629501700	-0.626629499249	-0.626629502200	-0.626629499249
$\bar{\varphi}_3$	-0.116389657100	-0.116389656492	-0.116389652300	-0.116389656492
$\bar{\varphi}_4$	-0.369142014800	-0.369142010564	-0.369142011300	-0.369142010564
$\bar{\varphi}_5$	-0.089265294600	-0.089265326504	-0.089265320160	-0.089265326504
$\bar{\varphi}_6$	-0.278892372600	-0.278892405770	-0.278892392400	-0.278892405770
$\bar{\varphi}_7$	-0.074523410290	-0.074523829554	-0.074522896140	-0.074523829555

за наступних крайових умов :

$$f(x, 0) = 0, \quad f(-1, t) = \sqrt{\pi} / (a\sqrt{t}), \quad f(1, t) = 0.$$

При $n = 8$, $a = 0,5$ з точністю обчислень 10^{-8} дістаємо наступні результати:

Таблиця 2.

x_i	$t = 0,5$	$t = 1$	$t = 10$	$t = 50$	$t = 100$	$t = 500$
точно						
зн	5,0132566	3,5449078	1,1209983	0,50132568	0,35449078	0,15853310
-1	5,0119420	3,5468288	1,1211398	,50149199	,35477064	,15928751
-,4	2,4412196	2,4729552	,85962547	,35593443	,24987556	,11114569
0	,67669312	1,3038416	,64255998	,25594976	,17906362	,079416826
,4	,10144246	,49510018	,39774847	,15425459	,10766902	,047673168
1	-,0116674	,00102866	-,00012446	-,00024159	-,000270306	-,000276427

Висновки.

На основі побудови та дослідження властивостей оператора інтегрування типу Вольтерра в базисі многочленів Чебишева першого роду $T_j(x)$ побудовано квазіспектральні та біортогональні поліномів на проміжку $x \in [-1; +1]$.

На обчислення коефіцієнтів розкладу функцій в біортогональні ряди за допомогою квадратурних формул точність обчислення має суттєвий вплив, в той час як порядок квадратурної формули, починаючи з деякого, має значно менший вплив.

Література

1. Дзядък В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — Киев: Наукова думка. — 1998.
2. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. — М.:Наука.-1987, 424с.
3. Моделювання інерційних змагальних навантажень на тренажері-симуляторі спортивного автомобіля [Електронний ресурс] / Анатолій Лопатъев, Людмира Рибак, Богдан Виноградський, Олег Рибак // Спортивна наука України. — 2014. — С. 16-25. — Режим доступу: <http://sportscience.ldufk.edu/sndex.php/article/view/199/192>.
4. Лопатъев А.О., Ткачек В.В., Власов А.П. Біотехнічні системи в стрілецьких видах спорту // Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті: Матеріали Х Міжнародної наукової конференції (27 лютого 2014 року, М. Львів-Харків) / Львів. Держ. Ун-т фізкультури, Харк. Нац. ун-т ім. Г.С.Сковороди. — Харків; «ОВС», 2014. — С. 18-26. — Режим доступу: <http://www.tmfv.com.ua/modeling/article/view/996>