

• **ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ФІЗИЧНОМУ ВИХОВАННІ  
І СПОРТІ. БІОМЕХАНІКА ТА КІНЕЗІОЛОГІЯ**

• **INFORMATION TECHNOLOGIES IN PHYSICAL TRAINING  
AND SPORT. BIOMECHANICS AND KINESIOLOGY**

УДК 796.012.444.925

**КІНЕМАТИКА  
ЗАВЕРШАЛЬНОЇ ФАЗИ ВІДШТОВХУВАННЯ  
У СТРИБКАХ НА ЛИЖАХ З ТРАМПЛІНА**

**Володимир БАНАХ, Ігор ЗАНЕВСЬКИЙ**

*Львівський державний університет фізичної культури*

**Анотація.** Метою роботи було створення моделі техніки відштовхування на основі кінематичних параметрів тіла лижника в момент відриву від стола трампліна. Дібрано кінематичні параметри, що характеризують техніку лижника в завершальній фазі відштовхування, та визначено їхню інформативність стосовно довжини стрибка. Виявлено узагальнені фактори техніки виконання завершальної фази відштовхування. На основі факторного аналізу встановлено, що кінематика тіла лижника в момент вистрибування може бути змодельована на основі трьох узагальнених факторів, які враховують дев'ять параметрів. Обґрунтовано варіанти моделі техніки відштовхування з уваги на точність та практичну зручність її застосування в технічній підготовці стрибунів на лижах з трампліна.

**Ключові слова:** стрибки на лижах з трампліна, відштовхування, кінематичні параметри, модель спортивної техніки.

**Постановка проблеми.** У системі спортивного вдосконалення кваліфікованих спортсменів важливе місце займає розділ технічної підготовки. Модернізація спортивного інвентарю, зміна правил, висока конкурентна боротьба разом із постійним зростанням спортивних результатів спонукають до пошуку найраціональніших способів удосконалення техніки виконання рухів змагальної вправи [3].

Практика стрибків на лижах з трампліна вимагає ефективних нововведень у теорію та методику цього виду спорту. В останні роки в техніці виконання стрибків відбулися значні зміни [2]. За цих умов потребують коригування модельні характеристики рухів лижника-стрибуна під час виконання відштовхування, яке за даними досліджень є основою вдосконалення спортивної техніки для досягнення високих результатів.

Ключову роль у навчально-педагогічному процесі та технічному вдосконаленні відіграє застосування відеоаналізу. Він дозволяє, ефективно здійснюючи контроль, вчасно виявляти помилки та вносити необхідні корективи в техніку виконання стрибка [1]. На сьогодні визначення об'єктивних параметрів виконання відштовхування на основі відеокомп'ютерного аналізу залишається актуальною проблемою теорії і методики технічної підготовки у стрибках на лижах з трампліна.

Дослідження проводилися в рамках завдань НДР за темою 2.2.5 „Моделювання процесів взаємодії тіла людини зі спортивним приладдям” Зведеного плану науково-дослідної роботи у сфері фізичної культури і спорту на 2006 – 2010 роки (№ держ. реєстрації 0106U012607).

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Загальновідомо, що спортивний результат у стрибках на лижах з трампліна, як і в усіх стрибкових вправах, залежить від ефективного відштовхування. На цьому наголошують і відомі спеціалісти зі стрибків на лижах [4, 6]. Велика увага приділяється біомеханічним параметрам техніки виконання відштовхування. У процесі виконання відштовхування відбувається поступальний рух загального центра мас (ЗЦМ) тіла спортсмена вверх-уперед, який відбувається в основному в колінному та кульшовому суглобах за рахунок розгинання гомілки й стегна [13]. Величини швидкості й кута нахилу руху ЗЦМ є критерієм ефективності виконання відштовхування.

М. Янура (M. Janura) проаналізував техніку виконання стрибків на трампліні K-120 (Innsbruck, 1998) та охарактеризував кінематичні параметри кутових положень ланок тіла спортсменів на краю стола в момент відштовхування [8]. За його даними, середнє значення кута нахилу гомілки відносно напрямку руху лижника дорівнює  $89^\circ$ , колінного суглоба –  $141^\circ$ , кута нахилу тулуба відносно столу –  $24^\circ$ . Величина кута нахилу прямої, яка сполучає осі кульшового й гомілковостопного суглоба, відносно площини столу знаходиться в межах від  $88^\circ$  до  $92^\circ$ . Величина кута нахилу прямої, що сполучає ЗЦМ та вісь гомілковостопного суглоба, відносно площини столу – у межах від  $73^\circ$  до  $76^\circ$ . Поздовжня складова вектора швидкості руху ЗЦМ дорівнює  $25,59\text{--}25,78$  м/с. Автор визначив, що останні три показники мають статистично істотний кореляційний взаємозв'язок із довжиною стрибка.

В іншій праці М. Янура [6] на основі даних, отриманих у результаті відеоаналізу (50 Гц), подано кінематичні параметри техніки виконання відштовхування групою лижників ( $n = 72$ ) на трампліні HS 134 (Liberec, 2009). На краю стола кут нахилу ЗЦМ у кваліфікованих спортсменів знаходився в межах  $68^\circ\text{--}72^\circ$ , кут нахилу тулуба –  $25^\circ\text{--}29^\circ$ , а кут нахилу гомілки –  $61^\circ\text{--}69^\circ$ .

Б. Джост (B. Jost) [9] на основі даних відеоаналізу техніки відштовхування визначив кінематичні характеристики положень ланок тіла лижників-стрибунів на краю стола (K-185, Planica, 1999). Деякі із досліджуваних ним параметрів мали кореляційні взаємозв'язки із довжиною стрибка. Кут у колінному суглобі знаходився в межах від  $133^\circ$  до  $143^\circ$  ( $r = 0,31$ ), кут нахилу тулуба відносно площини столу –  $27^\circ\text{--}31^\circ$ , кут нахилу прямої, що сполучає осі гомілковостопного та кульшового суглобів, відносно площини столу –  $90^\circ\text{--}95^\circ$ , а кут нахилу ЗЦМ –  $70^\circ\text{--}74^\circ$ . Виявлено, що у кращих спортсменів останні два показники мають менші величини порівняно із спортсменами, котрі мають гірший результат. Показники вертикальної складової швидкості руху ЗЦМ на краю стола у кращих спортсменів вищі. Найбільша різниця величини цього показника становила  $0,42$  м/с, при цьому спостерігався незначний кореляційний взаємозв'язок із довжиною стрибка ( $r = 0,20$  при  $p < 0,04$ ).

В. Мюллер (W. Muller) [12] проаналізував техніку виконання стрибків на трампліні K-120 під час проведення Олімпійських ігор (Salt Lake City, 2002). Він визначив, що в групі досліджених ним провідних спортсменів середнє значення кута в кульшовому суглобі на краю стола дорівнює  $122^\circ$ , а кута, утвореного лінією, що сполучає вісь гомілковостопного суглоба та вісь плечового суглобу, і площини столу –  $68^\circ$ .

Т. Сасаки (T. Sasaki) [13] проаналізував техніку виконання стрибків кваліфікованими спортсменами на трампліні K-90 (Nakuba, 1990) за допомогою швидкісного відеознімання (240 Гц). Для наочного пояснення зміни потужності відштовхування він використав три графічні моделі, застосовуючи кінетичні та кінематичні параметри. Автор вказує, що в більшості спортсменів максимум кутової швидкості розгинання в колінних суглобах спостерігається наприкінці відштовхування за  $0,021$  с до краю стола. Значне розгинання в колінному суглобі сприяє винесенню ЗЦМ лижника вперед за опору. Максимальна потужність відштовхування за рахунок кутової швидкості під час розгинання в кульшовому суглобі спричиняє створення додаткової енергії за рахунок розгинання тулуба, проте надмірне розгинання створює негативний вплив на аеродинамічні властивості тіла внаслідок значного опору повітря.

Й. Водікар (J. Vodigar) [19] проаналізував техніку виконання стрибків на трампліні K-95 (Hintrezenarten, 2008; частота знімання 200 Гц). Автор визначив динамічні та кінематичні параметри відштовхування у кращих спортсменів Словенії віком 25 років і старше. Автор виявив параметри, які мають високі кореляційні зв'язки із довжиною стрибка: швидкість розгону ( $r = 0,98$ ), швидкість відштовхування ( $r = 0,98$ ), точність відштовхування ( $r = 0,85$ ). Точність відштовхування визначалася положенням точки прикладення сили відштовхування за допомогою тензоплатформи. Величина вертикальної складової швидкості руху ЗЦМ під час відштовхування у спортсменів знаходилася в межах від  $1,67$  до  $2,71$  м/с.

На основі даних кінематичного аналізу стрибків на лижах з трампліна (1992–1994 рр.), який проводив Ф. Ваверка (F. Vaverka) [16], визначалася вчасність відштовхування на краю стола величиною кута в колінному суглобі. Цей кут, за даними дослідника, повинен дорівнювати  $135^\circ\text{--}141^\circ$  на відстані  $0,20\text{--}0,15$  м від краю стола. Відхилення величини цього кута від

вказаних границь оцінюється як помилка. Автор проаналізував [14] техніку відштовхування на трампліні К-109 (Innsbruck, 1993–1995,  $n = 155$ ), обчисливши кінематичні параметри пози лижника під час відштовхування за 4, 3, 2 і 1 м до краю стола. За абсолютною величиною коефіцієнти кореляції між довжиною стрибка й кінематичними параметрами відштовхування є низькими ( $r = 0,1-0,3$ ). Кут нахилу прямої, що сполучає ЗЦМ і гомілковостопний суглоб, відносно столу знаходиться в межах від  $71^\circ$  до  $79^\circ$  та має зворотній кореляційний взаємозв'язок із довжиною стрибка ( $r = -0,17$  при  $p < 0,05$ ), кут нахилу тулуба відносно столу є в межах від  $10^\circ$  до  $40^\circ$  [15].

За даними П. Комі (P. Komí) [11] на трампліні К-125 (Czech, 1998) середнє значення кута нахилу прямої, яка сполучає плечовий суглоб та вісь гомілковостопного суглоба, відносно столу дорівнювало  $60^\circ$ . Кут у кульшовому суглобі на краю стола дорівнював  $90^\circ$ , кут у колінному суглобі –  $130^\circ$ , а кут нахилу гомілки до площини столу –  $65^\circ$  [10].

Однак у цих дослідженнях не подано модельні характеристики пози лижника під час відштовхування, зокрема, на краю стола. Ми не виявили також даних, які стосуються кінематичних параметрів техніки виконання відштовхування юними спортсменами на середніх трамплінах.

**Метою роботи** було створення моделі техніки відштовхування на основі кінематичних параметрів тіла лижника в момент відриву від стола трампліна. **Завдання дослідження:** дібрати кінематичні параметри, що характеризують техніку лижника в завершальній фазі відштовхування; визначити інформативність кінематичних параметрів стосовно довжини стрибка; виявити узагальнені фактори техніки виконання завершальної фази відштовхування; обґрунтувати варіанти моделі техніки відштовхування з уваги на точність та практичну зручність її застосування в технічній підготовці стрибунів з трампліна.

**Методика дослідження.** Відеозображення тридцяти трьох учасників змагань на трампліні К-70 у момент відриву від стола відштовхування у стрибках першої спроби було опрацьовано за методикою кінематичного аналізу [20]. Відеозапис проведено з використанням цифрової камери CANON S3 IS з частотою 60 Гц [5]. Довжина стрибка в цій спробі дорівнювала  $63,44 \pm 8,18$  м (додаток 2: табл. Д1).

Сім суглобних кутів, а також ще чотири кути, які використовуються як параметри пози тіла лижника (рис. 1), визначалися за тригонометричними формулами (додаток 2).

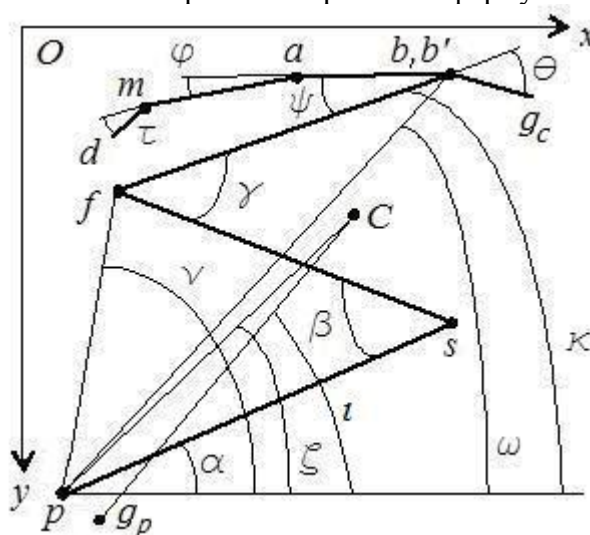


Рис. 1. Схема тіла лижника

Кінематика завершальної фази відштовхування визначалася кутами пози тіла лижника й швидкістю ланок тіла, а також загального центра мас. Швидкості обчислено методом чисельного диференціювання за трьома точками [21], які відповідають трьом останнім кадрам зображення лижника на столі відштовхування:

$$\ddot{z} = \frac{-3z_0 + 4z_{-1} - z_{-2}}{2\Delta t}, \quad (1)$$

де  $z$  – узагальнене позначення параметра;  $\Delta t = f^{-1}$ ;  $f$  – частота відеозапису. Кривка

$$\left(\dot{\bullet}\right) \equiv \frac{d}{dt}$$

– це знак похідної по часу, а індекси 0, -1 і -2 вжито для позначення відповідно останнього і двох передостанніх значень параметра кінематики тіла лижника, зафіксованих на столі відштовхування. Координати маркерних точок на тілі лижника визначалися в пікселях на робочому полі графічного редактора Paint. Обчислення виконувалися з використанням функцій пакета аналізу MS Excel і комп'ютерної програми Statistica.

Для виявлення статистичної залежності довжини стрибка від параметрів відштовхування застосовано кореляційний аналіз. Для статистичного опрацювання результатів вимірювань використано метод Колмогорова – Смірнова в адаптації Ліллефорса [18], за яким оцінено нормальність закону розподілу довжини стрибка й параметрів пози тіла лижника. Аналіз форми кореляційного взаємозв'язку зазначених параметрів проведено з використанням критерію лінійності взаємозв'язку. Істотність взаємозв'язку визначали методом статистичних гіпотез із використанням параметричного критерію Стьюдента. Моделі техніки відштовхування будувалися на основі нелінійної одно- й двовимірної регресії.

**Результати дослідження.** Обчислено величини семи суглобних та пов'язаних із ними кутів, що визначають позу тіла, й чотири кути, які використовуються як параметри пози (див. рис. 1): кут у гомілковостопному суглобі ( $\alpha$ ); кут у колінному суглобі ( $\beta$ ); у кульшовому суглобі ( $\gamma$ ); кут нахилу тулуба, тобто відрізка прямої, яка проходить через осі кульшового й плечового суглобів, до напрямку руху лижника ( $\kappa$ ); кут нахилу голови відносно тулуба ( $\theta$ ); кут у плечовому суглобі ( $\psi$ ); кут у ліктьовому суглобі ( $\varphi$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла і центр стопи ( $\zeta$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла й вісь гомілковостопного суглоба ( $\xi$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі кульшового й гомілковостопного суглоба ( $\nu$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі гомілковостопного й плечового суглобів ( $\omega$ ).

До другої групи кінематичних параметрів належать кутові швидкості названих вище кутів і проекції вектора швидкості загального центра мас тіла (додаток 2: табл. Д2). Останні два розглянуто як відношення до довжини тіла спортсмена. Ще один (двадцять п'ятий) параметр – це частина довжини стопи від переду черевиків до перпендикуляра, опущеного із загального центра мас тіла на поверхню стола відштовхування.

**Параметри кінематики.** Статистичні характеристики кінематичних параметрів техніки виконання завершальної фази відштовхування досліджуваної групи стрибунів подано в таблиці 1. У дев'яти з двадцяти п'яти параметрів ( $a, g, z, V, w, n, \xi/h, K, \nu$ ) виявлено статистично істотний кореляційний взаємозв'язок із довжиною стрибка ( $p < 0,05$ ). Таким чином, ці параметри є інформативними стосовно моделі техніки відштовхування з уваги на спортивний результат.

Результати статистичного опрацювання параметрів відштовхування вказують на те, що запозичена з роботи [20] восьмиланкова кінематична схема тіла лижника дійсно придатна для аналізу кінематики тіла лижника у завершальній фазі відштовхування від стола трампліна (див. табл. 1).

Таблиця 1

**Кінематичні параметри  
та результати статистичного опрацювання**

| №  | Параметр             | Розмірність     | <i>M</i> | <i>SD</i> | <i>r</i> | <i>p</i> |
|----|----------------------|-----------------|----------|-----------|----------|----------|
| 1  | <i>a</i>             | градус          | 66,0     | 7,5       | -0,636   | 0,000    |
| 2  | <i>b</i>             | градус          | 127,9    | 9,2       | -0,231   | 0,197    |
| 3  | <i>g</i>             | градус          | 93,2     | 10,2      | 0,356    | 0,042    |
| 4  | <i>У</i>             | градус          | 33,4     | 10,0      | 0,039    | 0,829    |
| 5  | <i>j</i>             | градус          | 10,2     | 10,7      | -0,050   | 0,781    |
| 6  | <i>q</i>             | градус          | 10,4     | 6,6       | -0,085   | 0,636    |
| 7  | <i>k</i>             | градус          | 31,3     | 6,3       | 0,155    | 0,389    |
| 8  | <i>z</i>             | градус          | 78,1     | 4,2       | -0,684   | 0,000    |
| 9  | $\zeta$              | градус          | 82,7     | 4,0       | -0,699   | 0,000    |
| 10 | <i>w</i>             | градус          | 70,1     | 3,6       | -0,524   | 0,002    |
| 11 | <i>n</i>             | градус          | 91,9     | 4,9       | -0,701   | 0,000    |
| 12 | $\frac{\alpha}{h}$   | c <sup>-1</sup> | 0,33     | 0,90      | 0,237    | 0,183    |
| 13 | $\frac{\beta}{h}$    | c <sup>-1</sup> | 1,22     | 0,48      | 0,355    | 0,042    |
| 14 | <i>K</i>             | %               | 21,4     | 31,5      | -0,698   | 0,000    |
| 15 | $\frac{\alpha}{h}$   | c <sup>-1</sup> | 1,83     | 2,88      | 0,107    | 0,553    |
| 16 | $\frac{\beta}{h}$    | c <sup>-1</sup> | 7,55     | 3,86      | 0,541    | 0,001    |
| 17 | $\frac{\gamma}{h}$   | c <sup>-1</sup> | 7,03     | 4,37      | 0,319    | 0,070    |
| 18 | $\frac{\delta}{h}$   | c <sup>-1</sup> | 4,25     | 3,95      | -0,235   | 0,187    |
| 19 | $\frac{\epsilon}{h}$ | c <sup>-1</sup> | 1,54     | 5,94      | -0,309   | 0,080    |
| 20 | $\frac{\zeta}{h}$    | c <sup>-1</sup> | 0,69     | 6,78      | -0,044   | 0,810    |
| 21 | $\frac{\eta}{h}$     | c <sup>-1</sup> | 1,52     | 3,03      | -0,050   | 0,782    |
| 22 | $\frac{\theta}{h}$   | c <sup>-1</sup> | -0,50    | 1,90      | -0,094   | 0,602    |
| 23 | $\frac{\iota}{h}$    | c <sup>-1</sup> | -0,46    | 2,06      | -0,127   | 0,482    |
| 24 | $\frac{\kappa}{h}$   | c <sup>-1</sup> | -0,15    | 1,85      | -0,084   | 0,642    |
| 25 | $\frac{\lambda}{h}$  | c <sup>-1</sup> | -1,65    | 2,46      | -0,256   | 0,150    |

За факторним аналізом дев'яти інформаційних параметрів виявлено, що 93,5% загальної варіації можна пояснити трьома факторами, причому внесок у загальну варіацію головного фактора більший від половини (табл. 2). Внесок другого за вагомістю фактора приблизно на півпорядку, а третього – на один порядок менший. Такі співвідношення спостерігаються й між власними значеннями факторів.

Таблиця 2

**Результати факторного аналізу  
кінематичних параметрів відштовхування**

| №*                | Параметри      | Фактори |        |        |
|-------------------|----------------|---------|--------|--------|
|                   |                | 1       | 2      | 3      |
| 1                 | $a$            | -0,876  | -0,317 | 0,022  |
| 3                 | $g$            | 0,332   | -0,857 | 0,247  |
| 8                 | $z$            | -0,984  | -0,165 | -0,035 |
| 9                 | $V$            | -0,987  | -0,134 | -0,046 |
| 10                | $w$            | -0,864  | -0,414 | 0,054  |
| 11                | $v$            | -0,960  | 0,186  | -0,138 |
| 13                | $\alpha_c / h$ | 0,351   | -0,452 | -0,819 |
| 14                | $K, \%$        | -0,966  | -0,016 | 0,000  |
| 16                | $\beta$        | 0,407   | -0,794 | 0,145  |
| Власні числа      |                | 5,711   | 1,922  | 0,778  |
| Внесок фактора, % |                | 63,5    | 21,4   | 8,6    |

Примітка. \* – дивись таблицю 1.

Усі дев'ять параметрів досить чітко розподілені за визначеними факторами. До першого фактора належать шість параметрів ( $|r| = 0,864 \div 0,987$ ): кут у гомілковостопному суглобі ( $p < 0,001$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла й вісь гомілковостопного суглоба ( $p < 0,001$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла і центр стопи ( $p < 0,001$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі гомілковостопного й плечового суглобів ( $p < 0,001$ ); кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі кульшового й гомілковостопного суглоба ( $p < 0,001$ ) і частина довжини стопи від переду черевиків до перпендикуляра, опущеного із загального центра мас тіла на поверхню стола відштовхування ( $p < 0,001$ ). Істотність взаємозв'язку решти трьох параметрів із цим фактором суттєво менша ( $p = 0,019 \div 0,059$ ).

До другого фактора належать два параметри ( $|r| = 0,794; 0,857$ ): кут у кульшовому суглобі ( $p < 0,001$ ) та кутова швидкість розгинання колінного суглоба ( $p < 0,001$ ). Істотність взаємозв'язку решти семи параметрів із цим фактором суттєво менша ( $p = 0,008 \div 0,932$ ). До третього фактора належить відношення проекції вектора швидкості загального центра мас тіла на нормаль до поверхні стола відштовхування до довжини тіла лижника ( $|r| = 0,819; p < 0,001$ ). Істотність взаємозв'язку решти восьми параметрів із цим фактором також суттєво менша ( $p = 0,165 \div 0,998$ ).

**Параболічні моделі.** Відповідні до трьох факторів кластери параметрів кінематики тіла в момент вистрибування виразно локалізовані у трьох областях відповідного тривимірного графіка (рис. 2).

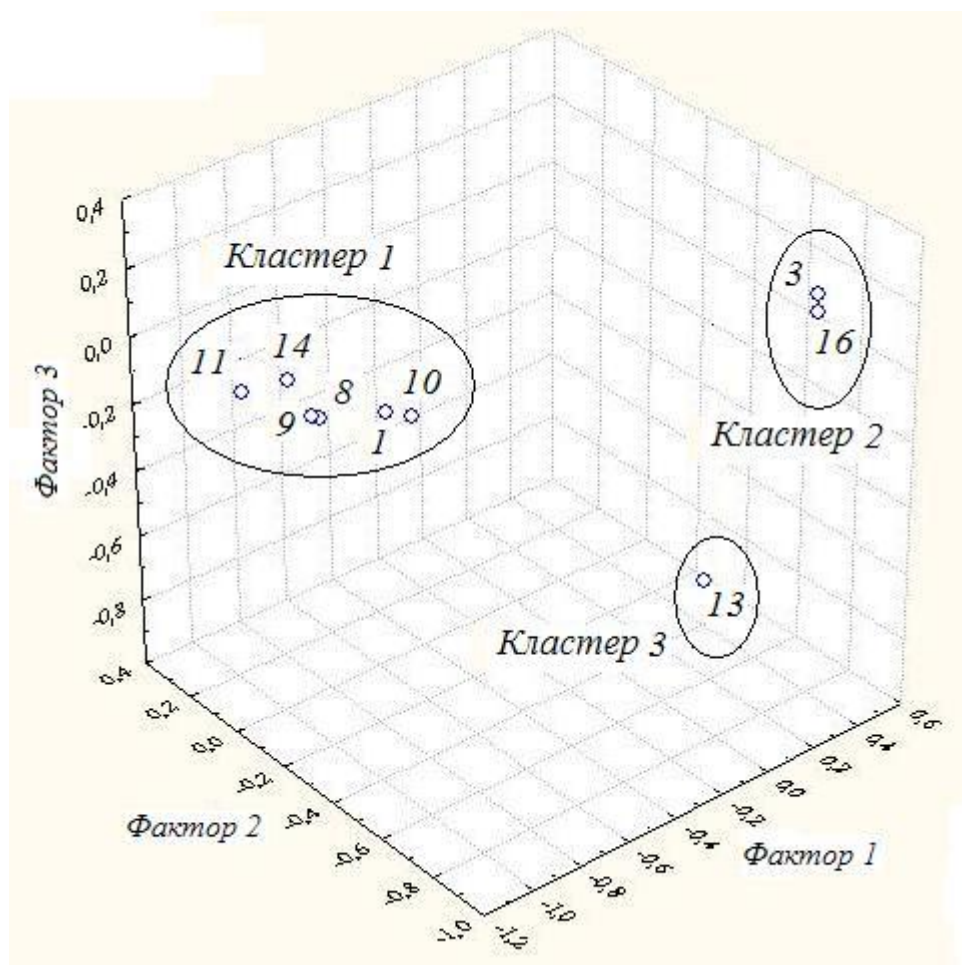


Рис. 2. Кластери параметрів за трьома факторами моделі кінематики тіла лижника в момент вистрибування

Оскільки всі параметри корелюють із головним фактором досить тісно, є підстави очікувати й відповідної кореляції між ними. Згідно з даними відповідної кореляційної таблиці, можна оцінити істотність цього взаємозв'язку на рівні менше ніж одна тисячна (табл. 3). Тож із достатньою мірою точності із шести параметрів, що становить цей фактор, можна залишити один. Очевидно, цим одним доцільно обрати параметр, який має найвищу тісноту кореляційного зв'язку із фактором, а саме, кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла й центр стопи:  $r_9 = -0,987$  (див. табл. 2).

Таблиця 3

Кореляційна таблиця для параметрів за головним фактором (коефіцієнт кореляції \ t-Стюдента)

| Параметр* | 1     | 8                  | 9     | 10    | 11    | 14    |
|-----------|-------|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| 1         | -     | 11,95 <sup>+</sup> | 11,57 | 7,60  | 6,72  | 8,18  |
| 8         | 0,906 | -                  | 85,93 | 13,60 | 13,24 | 15,50 |
| 9         | 0,901 | 0,998              | -     | 12,29 | 14,23 | 16,45 |
| 10        | 0,807 | 0,925              | 0,911 | -     | 6,11  | 8,20  |
| 11        | 0,770 | 0,922              | 0,931 | 0,739 | -     | 12,90 |
| 14        | 0,827 | 0,941              | 0,947 | 0,827 | 0,918 | -     |

Примітка. \* – див. табл. 2;  $+ t_{0,001;31} = 3,63$ .

Застосовуючи поліноміальну регресію для опису залежності довжини стрибка від параметрів кінематики тіла лижника, отримуємо відповідні апроксимаційні функції від першого до шостого степеня полінома (табл. 4). Поліпшення точності апроксимації, залежно від степеня полінома, не є рівномірним. Квадратична парабола порівняно з лінійною функцією має коефіцієнт апроксимації на 15,1% більший, а поліном шостого степеня порівняно з поліномом п'ятого степеня – тільки на 0,3%.

Нелінійні апроксимаційні поліноми (від другого до шостого степенів) показують абсолютний максимум приблизно в тому самому інтервалі значень параметра:  $\zeta = 78-83^\circ$  (рис. 3). З практичних міркувань зручніше користуватися простішою моделлю техніки, а квадратична парабола саме такою і є: найпростішою нелінійною функцією, яка дозволяє розглянути задачу на екстремум при несуттєво меншій порівняно з поліномами вищих степенів точності.

Таблиця 4

**Поліноміальна апроксимація залежності довжини стрибка  
від параметру кінематики тіла лижника**

| Степінь полінома | Рівняння регресії: $L(\zeta) = \dots$  | R <sup>2</sup> |
|------------------|--|----------------|
| 1                | $-1,4137\zeta + 180,39$  | 0,489          |
| 2                | $-0,0954\zeta^2 + 14,677\zeta - 496,42$  | 0,576          |
| 3                | $0,0123\zeta^3 - 3,2088\zeta^2 + 275,86\zeta - 7780,6$   | 0,629          |
| 4                | $0,0007\zeta^4 - 0,2073\zeta^3 + 24,428\zeta^2 - 1266\zeta + 24405$                                | 0,634          |
| 5                | $-0,0004\zeta^5 + 0,1595\zeta^4 - 26,917\zeta^3 + 2266,1\zeta^2 - 95167\zeta + 2E+06$              | 0,654          |
| 6                | $-3E-05\zeta^6 + 0,017\zeta^5 - 3,485\zeta^4 + 380,12\zeta^3 - 23271\zeta^2 + 758232\zeta - 1E+07$ | 0,656          |

Запишемо рівняння регресії «довжина стрибка – кут нахилу тіла лижника» в такій формі:

$$L(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2, \quad (2)$$

$$\text{де } a_0 = -496,42; a_1 = 14677; a_2 = -0,0954.$$

В аналогічний спосіб запишемо рівняння регресії «довжина стрибка – кут у кульшовому суглобі», який має найвищу тісноту кореляції із другим фактором ( $r_3 = -0,857$ ), а також рівняння регресії «довжина стрибка – проекція вектора швидкості загального центра мас тіла лижника на нормаль до поверхні стола у відношенні до довжини тіла», яке має найвищу тісноту кореляції із третім фактором ( $r_{13} = -0,819$ ):

$$L(\gamma) = b_0 + b_1\gamma + b_2\gamma^2; \quad L(\eta) = c_0 + c_1\eta + c_2\eta^2, \quad (3)$$

$$\text{де } b_0 = -47,87; b_1 = 2,1881; b_2 = -0,0105; \quad \eta = -\frac{\zeta}{h}; c_0 = 55,40; c_1 = 3,8941; c_2 = 0,0021.$$

Необхідною умовою існування екстремуму функцій (2) і (3) є:

$$\frac{dL(\zeta)}{d\zeta} = 0; \quad \frac{dL(\gamma)}{d\gamma} = 0; \quad \frac{dL(\eta)}{d\eta} = 0.$$



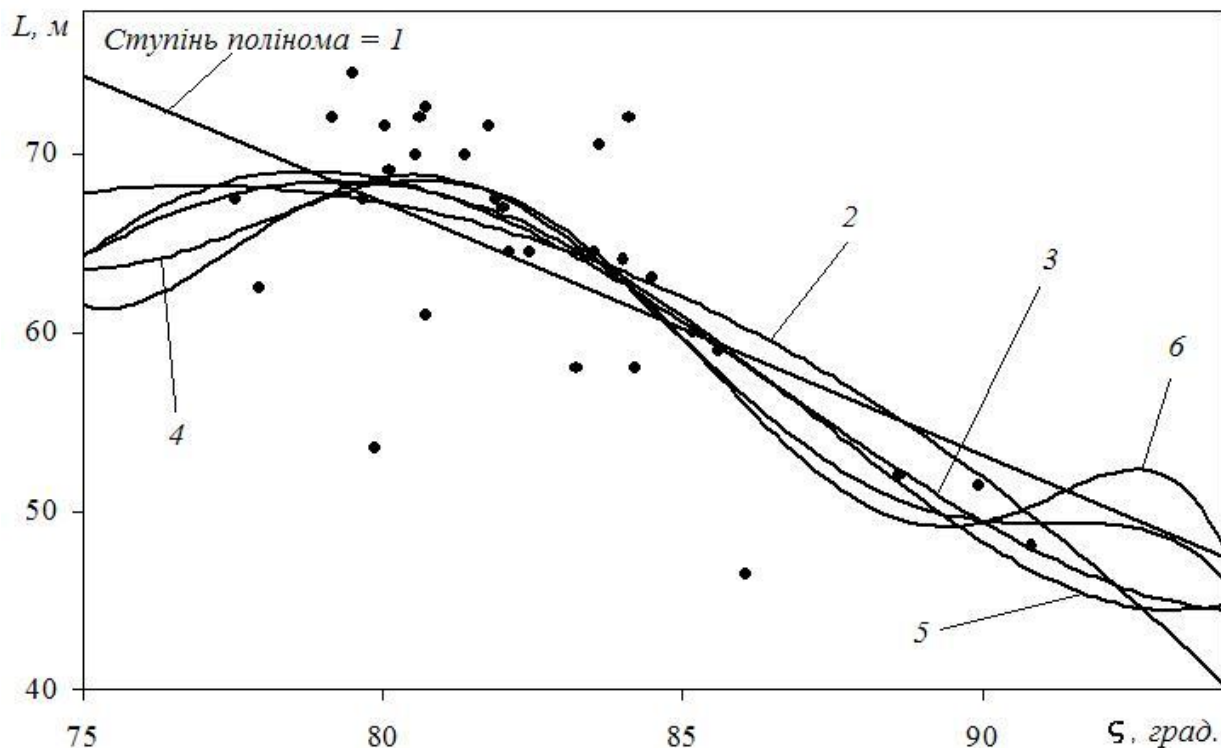


Рис. 3. Графіки регресійної залежності довжини стрибка від кута нахилу тіла лижника в момент вистрибування

Підставляючи (2) і (3) у ці три рівняння, отримаємо:

$$\zeta_{extr} = \frac{-a_1}{2a_2} = 76,9^\circ; \quad \gamma_{extr} = \frac{-b_1}{2b_2} = 104,2^\circ; \quad \eta_{extr} = \frac{-c_1}{2c_2} = -927,2^\circ. \quad (4)$$

$$\frac{d^2L(\zeta)}{d\zeta^2} \equiv 2a_2 < 0; \quad \frac{d^2L(\gamma)}{d\gamma^2} \equiv 2b_2 < 0$$

Оскільки ; , функція (2) і перша з функцій (3) набувають максимальних значень при обчислених величинах кутів.

$$\frac{d^2L(\eta)}{d\eta^2} \equiv 2c_2 > 0$$

Оскільки , друга з функцій (3) набуває мінімального значення в точці екстремуму (4). Відповідні значення функцій (тобто довжини стрибка) записано нижче:

$$L(\zeta_{extr}) = 68,08 \text{ м}; \quad L(\gamma_{extr}) = 65,38 \text{ м}; \quad L(\eta_{extr}) = -1749,84 \text{ м}.$$

Очевидно, що третє із цих значень не має сенсу на практиці, а перші два можуть бути оцінками для модельних характеристик техніки вистрибування. Тобто для досягнення максимальної довжини стрибка проекція вектора швидкості загального центра мас тіла лижника на нормаль до поверхні стола у відношенні до довжини тіла має бути максимальною, а кут кульшового суглоба та кут нахилу тіла лижника повинні мати оптимальні величини (4).

**Двопараметрична модель.** Оскільки екстремум на максимум спортивного результату з'являється по перших двох факторах, доцільно побудувати відповідну двопараметричну модель кінематики відштовхування. Відповідне рівняння множинної регресії для довжини стрибка залежно від величин кута в кульшовому суглобі ( $\gamma$ ) й кута нахилу тіла лижника ( $\zeta$ ) апроксимовано з використанням полінома другого степеня:

$$L(\zeta, \gamma) = k_0 + k_{\zeta 1}\zeta + k_{\gamma 1}\gamma + k_{\zeta 2}\zeta^2 + k_{\gamma 2}\gamma^2 + k_{\zeta\gamma}\zeta\gamma, \quad (5)$$

де  $k_0 = -829,5$ ;  $k_{\zeta 1} = 18,78$ ;  $3,134$ ;  $k_{\zeta 2} = -0,1095$ ;  $k_{\gamma 2} = -0,0085$ ;  $k_{\zeta\gamma} = -0,0165$  -

коефіцієнти рівняння, отримані із застосуванням функції “Graphs → 3D Surface Plots → Quadratic” з пакета комп’ютерних програм Statistica. Графік відповідної рівнянню (5) поверхні регресії подано на рисунку 4.

Рівняння (5) є аналітичною формою двопараметричної моделі завершальної фази відштовхування. Розглянемо задачу оптимізації техніки виконання цієї фази. Критерієм оптимальності, очевидно, буде довжина стрибка, функціоналом оптимізації – функція (5), а параметрами оптимізації – кути  $\zeta$  і  $\gamma$ . Оптимальними величинами цих кутів будуть такі їх значення, при яких довжина стрибка набуває максимальної величини. Таким чином, треба розв’язати задачу на екстремум функції. Необхідною умовою існування екстремуму є рівність нулю перших похідних (частинних) функції по параметрах (кутах):

$$\frac{\partial L(\zeta_{ext}, \gamma_{ext})}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial L(\zeta_{ext}, \gamma_{ext})}{\partial \gamma} = 0. \quad (6)$$

У результаті диференціювання функції (5)

$$\frac{\partial L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta} = k_{\zeta 1} + 2k_{\zeta 2}\zeta + k_{\zeta\gamma}\gamma; \quad \frac{\partial L(\zeta, \gamma)}{\partial \gamma} = k_{\gamma 1} + 2k_{\gamma 2}\gamma + k_{\zeta\gamma}\zeta; \quad (7)$$

та підстановки виразів із правих частин останніх рівнянь у систему (6) отримуємо координати точки, в якій може існувати екстремум функції (5):

$$\zeta_{ext} = 77,6^\circ; \quad \gamma_{ext} = 109,1^\circ. \quad (8)$$

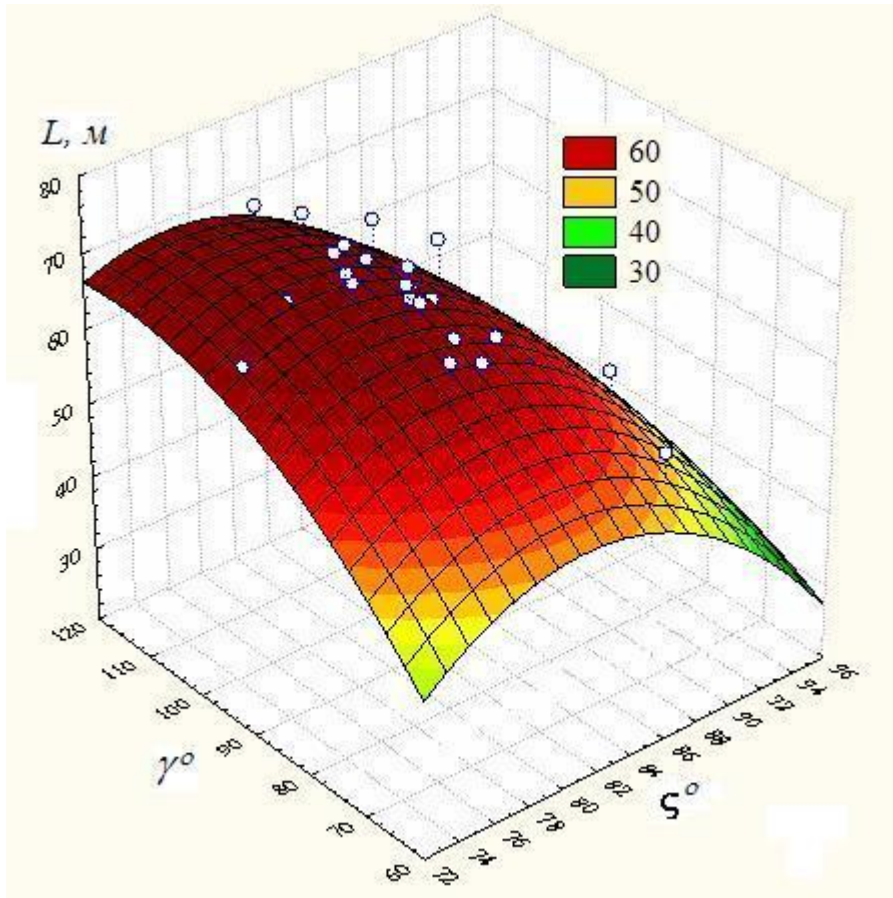


Рис. 4. Кореляційне поле й поверхня регресії двофакторної моделі

Для перевірки достатньої умови існування екстремуму й виявлення його характеру визначаємо другі похідні функції (5):

$$\frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta^2} = 2k_{\zeta 2} = -0,219; \quad \frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \gamma^2} = 2k_{\gamma 2}; \quad \frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta \partial \gamma} = k_{\zeta\gamma}.$$

Оскільки вираз  $\frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta^2} \times \frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \gamma^2} - \frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta \partial \gamma} = 0,00345$  є додатним, функція має екстремум у точці (8). Причому цей екстремум є максимумом, оскільки  $\frac{\partial^2 L(\zeta, \gamma)}{\partial \zeta^2} < 0$ .

Отож при оптимальних значеннях параметрів (8) значення функції (довжина стрибка) досягає максимуму:  $L(\zeta, \gamma)_{max} = 69,72$  м.

Таблиця 5

## Параметри моделей кінематики вистрибування

| Модель       | Параметри (похибка*, %) |                 | Спортивний результат (похибка*, %) |
|--------------|-------------------------|-----------------|------------------------------------|
|              | $\gamma_0$              | $\zeta_0$       | $L$ , м                            |
| Однофакторна | 104,2<br>(-4,5%)        | -               | 65,38<br>(-6,2%)                   |
|              | -                       | 76,9<br>(-0,8%) | 68,08<br>(-2,3%)                   |
| Двофакторна  | 109,1                   | 77,6            | 69,72                              |

Примітка. \* – відносно двофакторної моделі.

**Обговорення результатів.** Таким чином, точнішою для побудови моделі пози тіла є пара параметрів: кути  $\gamma$  і  $\zeta$ . З практичної точки зору використання іншої пари параметрів з урахуванням кута  $Z$  значно ускладнює підготовчий процес аналізу техніки відштовхування, оскільки для визначення величини кута нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через ЗЦМ тіла та центр маси стопи відносно площини столу, потрібно врахувати положення всіх ланок тіла. А для побудови моделі на основі першої пари параметрів ( $g$  і  $\zeta$ ) достатньо визначити координати лише трьох точок – осей колінного, кульшового і плечового суглобів.

На практиці для тренерів зручніше використовувати кутові параметри  $a$ ,  $b$ ,  $g$ ,  $w$ ,  $v$ . Величина кута  $a$ , за нашими даними, становила  $66,0^\circ \pm 7,5^\circ$ . Цей параметр має тісний кореляційний взаємозв'язок із основним фактором – довжиною стрибка ( $r = -0,636$ ,  $p < 0,001$ ) – та значною мірою визначає положення ЗЦМ під час відштовхування та величини параметрів  $Z$ ,  $\zeta$  і  $K$ . Тобто зменшення величини кута в гомілковостопному суглобі забезпечує відповідне розміщення ЗЦМ відносно опори ( $K$ ), більший нахил ЗЦМ ( $Z$ ,  $\zeta$ ) та збільшує момент обертання системи лижник-лижі відносно гомілковостопного суглоба на краю стола під час відштовхування та при вильоті. Це дозволяє спортсменові швидше зайняти аеродинамічно вигідне положення в польоті з більшим нахилом уперед. Наслідком цього є менші витрати, викликані розсіянням кінетичної енергії тіла спортсмена при вильоті, що її отримав лижник на горі розгону та під час відштовхування.

Величина кута  $b = 127,9^\circ \pm 9,2^\circ$  є меншою майже на  $10^\circ$  від даних, отриманих у попередніх дослідженнях [8, 9, 16]. За даними Ф. Ваверки [16], кут  $b$  розглядається як показник, що характеризує точне відштовхування. Відмінності у величинах цього кута, отриманих у нашому дослідженні, може бути пояснене тим, що система лижник-лижі на краю стола знаходиться на відстані, що дорівнює довжині стопи. У попередніх працях дослідники приймали за крайнє положення лижника таке, коли проекція осі гомілковостопного суглоба збігалася із краєм стола.

Кут нахилу тулуба відносно напрямку руху ( $k$ ) за величиною дорівнює  $31,3^\circ \pm 6,3^\circ$  і характеризує аеродинамічні властивості системи. Надмірне його збільшення негативно впливає на аеродинамічні характеристики тіла лижника, що збільшує опір повітря.

Наші дані підтверджують результати [15] про те, що існує негативний кореляційний зв'язок показника ( $Z$ ) із довжиною стрибка, проте, за нашими даними, тіснота кореляції є нижчою ( $r = -0,684$ , при  $p < 0,001$ ). Кут нахилу ЗЦМ, за результатами наших досліджень, становить  $78,1^\circ \pm 4,2^\circ$ , що є дещо меншим від даних [6, 7, 9, 16]. Величини кутів нахилу прямих, що сполучають осі гомілковостопного і плечового із віссю кульшового суглоба відносно напрямку руху ( $W, \Pi$ ), дорівнюють відповідно  $70,1^\circ \pm 3,6^\circ$  і  $91,9^\circ \pm 4,9^\circ$ . На основі даних [6, 7, 9, 14-17] можна вважати, що величини кутів  $a, g, b, k, Z, W, V$  визначають позу тіла й положення ЗЦМ у поздовжньому напрямку. Подані середні дані величин кутів відрізняються від наших тим, що є дещо нижчими. Це можна пояснити тим, що відповідні дослідження проводилися на трамплінах К-95, К-120 та К-185, які є більшими за потужністю. Це вимагало від спортсменів більшого нахилу вперед під час вильоту та на столі для того, щоб забезпечити вигідне аеродинамічне положення. У цих дослідженнях брали участь, як правило, кваліфіковані стрибуни або спортсмени високого міжнародного класу, які мали значно вищий рівень спортивно-технічної майстерності порівняно із залученим до наших досліджень контингентом.

Швидкість розгинання в колінному суглобі ( $\beta$ ) впливає на величину виносу ЗЦМ вверх-уперед за опору. Цей параметр має значні кореляційні взаємозв'язки із довжиною стрибка. Параметр вертикальної складової відносно швидкості ЗЦМ ( $V_c/h$ ) характеризує потужність відштовхування та сприяє збільшенню висоти траєкторії руху системи під час вильоту. Швидкість розгинання в колінному суглобі сприяє збільшенню поздовжньої складової вектора відносно швидкості ЗЦМ, що дозволяє лижникові під час руху на розгоні отримати відповідне пришвидшення. Надмірне розгинання в колінному суглобі може викликати ще більше зростання обертового моменту системи лижник-лижі та призвести до падіння лижника.

Таким чином, оскільки спрямованість взаємозв'язку довжини стрибка із параметрами пози тіла лижника ( $a, W, V, K, Z, S$ ) в кінці відштовхування від'ємна (див. значення  $r$  у табл. 1, 2), можна говорити про збільшення довжини стрибка при зменшенні величини зазначених параметрів. Отримані дані параметрів свідчать про те, що зменшення величини цих параметрів у процесі відштовхування збільшує обертовий момент системи лижник-лижі. Це дозволяє лижникові швидше нахилитися вперед та швидше створити аеродинамічно вигідні умови для польоту.

**Напрямок подальших досліджень** – це інтерполяція моделей відштовхування на цілу довжину стола трампліна, що можна зробити з використанням моделей пози тіла лижника в кінці криволінійної ділянки розгінної гірки [20] й описаній у цій статті моделі пози тіла в момент вистрибування.

### Висновки.

1. Доведено, що запозичена з роботи [20] восьмиланкова кінематична схема тіла лижника придатна для аналізу кінематики тіла лижника в завершальній фазі відштовхування від стола трампліна.

2. Дев'ять кінематичних параметрів тіла лижника в момент вистрибування можна вважати інформативними стосовно спортивного результату, оскільки існує статистично істотна кореляцію між ними й довжиною стрибка ( $p < 0,05$ ). Це – кути в гомілковостопному і кульшовому суглобах; кути нахилу до напрямку руху відрізків прямих ліній, які проходять через загальний центр мас тіла лижника та вісь гомілковостопного суглоба і центр стопи; кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі гомілковостопного й плечового суглобів, а також через осі кульшового й гомілковостопного суглобів; частина довжини стопи від переду черевиків до перпендикуляра, опущеного із загального центра мас тіла на поверхню стола відштовхування; кутова швидкість розгинання в колінному суглобі й проекція вектора швидкості загального центра мас тіла лижника на нормаль до поверхні стола відштовхування ( $|R| = 0,355 \pm 0,701$ ).

3. Кінематика тіла лижника в момент вистрибування може бути змодельована на основі трьох узагальнених факторів, які зумовлюють 93,5% загальної варіації параметрів, причому внесок у загальну варіацію головного фактора більший від половини, внесок другого за вагомістю фактора приблизно на півпорядку і третього – на один порядок менший від першого.

4. Оскільки максимум спортивного результату залежить від перших двох факторів, теоретично інформативною й практично доцільною слід вважати відповідну двопараметричну модель кінематики відштовхування, в якій враховано кут у кульшовому суглобі й кут нахилу до напрямку руху відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла лижника та центр стопи ( $p < 0,001$ ). За оптимальних значень цих кутів ( $\gamma = 109,1^\circ$ ;  $\zeta = 77,6^\circ$ ) прогнозована довжина стрибка дорівнює 69,72 м.

### Список літератури

1. Голубев К. П. Использование трамплинов с искусственным покрытием / К. П. Голубев, А. А. Петухов // Лыжный спорт. – 1982. – № 1. – С.41-43.
2. Лавров В. Контроль за техникой выполнения прыжков на лыжах с трамплина / В. Лавров // Лыжный спорт. – 1979. – № 1. – С. 16-19.
3. Петушинський Б. До проблеми удосконалення технічної майстерності спортсменів / Б. Петушинський // Молода спортивна наука України : зб. наук. праць з галузі фіз. культури і спорту. – Л., 2008. – Т. 1. – С. 244-249.
4. Arndt A. Techniques used by Olympic ski jumpers in the transition from take-off to early flight / Arndt A., Bruggeman G., Virnavirta M. // Journal of Applied Biomechanics. – 1995. – Vol. 11 (2). – P. 224-237.
5. Canon firmware hack unlocks features on DIGIC II-based cameras. – 2009. – [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.engadget.com/2007/09/11/canon-firmware-hack-unlocks-features-on-digic-ii-based-cameras>.
6. Janura M. Kinematic Analysis of the Take-Off and Start of the Early Flight Phase on Large (HS-134 m) during the 2009 Nordic World Ski Championships / L. Cabell, M. Elfmark, M. Janura, Z. Svoboda, F. Zahalka // Journal of Human Kinetics. – 2011. – Vol. 27. – PP. 5-16. – [Electronic resource]. – Access mode: <http://www.actabio.pwr.wroc.pl/Vol13No1/3.pdf>
7. Janura M. A comparison of the take-off and the transition phase of the ski jumping between the group of the ski jumpers and the competitors in Nordic combined / M. Janura, M. Lehnert, M. Elfmark, Fr. Vaverka. // Gymnica. – 1999. – Vol. 29. – № 2. – P. 7-13. – [Electronic resource]. – Access mode: <http://w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/viewFile/2572/2421>
8. Janura M. A longitudinal study of intra-individual variability in the execution of the in-run position in ski jumping / M. Janura, Fr. Vaverka, M. Elfmark, J. Salinger // Proceedings of the 16th International Symposium on Biomechanics in Sports / H.J Riehle, M.M. Vieten (Eds.) – Konstanz : Universitätsverlag Konstanz, 1998. – P. 124-127.
9. Jost B. Analysis off correlation between kinematic variables of the take-off and the length of the ski-jump / M. Coh, P. Janes, B. Jost – [Electronic resource]. – Access mode: <http://w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/viewFile/2380/2233>
10. Komi P. V. Biomechanics in sport. / P. V. Komi, M/ Virnavirta / V. M. Zatsiorsky. – 2000. – PP. 349-364. – [Electronic resource]. – Access mode: [www.mpbn.net/quest/pdf/biomechanics\\_hs.pdf](http://www.mpbn.net/quest/pdf/biomechanics_hs.pdf)
11. Komi P. V. Ski-jumping take-off performance: Determinants factors and methodological advances / P. V. Komi, M. Virnavirta / Science in skiing. / E. Muller (Ed.). – 2008. – P. 3-26. – [Electronic resource]. – Access mode: <http://www3.interscience.wiley.com/cgi-bin/bookhome/117934320÷CRETRY=1&SRETRY=0>
12. Muller W. The physics of ski jumping. – PP. 269-277. – [Electronic resource]. – Access mode: [cdsweb.cern.ch/record/1009275/files/p269.pdf](http://cdsweb.cern.ch/record/1009275/files/p269.pdf)
13. Sasaki T. Three techniques of ski jump take-off modeled by changes of joint angle / T. Sasaki, K. Tsunoda, H. Hoshino // Proceedings of the 16th International Symposium on Biomechanics in Sports / H.J Riehle, M.M. Vieten (Eds.) – Konstanz : Universitätsverlag Konstanz, 1998. – P. 233-236.
14. Vaverka F. A general versus individual model of the ski jumping technique / F. Vaverka, M. Junura, M. Elfmark, M. McPherson. – PP. 293-296. – [Electronic resource]. – Access mode: [w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/view/2718/2560](http://w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/view/2718/2560),

15. Vaverka F. A longitudinal study of the take-off and transition phase in ski-jumping at intersporttourne innsbruk 1992-1994 / M. Junura, F. Vaverka. – PP. 293-295.
16. Vaverka F. The accuracy of the ski-jumper's take-off / M. Janura, M. Krskova, J. Salinger, F. Vaverka. – PP. 319-321 – [Electronic resource]. – Access mode: w4.ub.uni-konstanz.de/cpa/article/view/2889
17. Vaverka Fr. Inter- and Intra-Individual Variability of the Ski-Jumper's Take-off. / Fr. Vaverka, M. Janura, M. Elfmark, J. Salinger, M. McPherson / Science in Skiing / E. M÷ller et al. (Eds.) – London : E&FN Spon, 1997. – P. 61-71.
18. Vincent W. J. Statistics in Kinesiology. / W. J. Vincent. – Champaign, Il. : Human Kinetics, 2001. – 276 p.
19. Vodigar J. The Factor Structure of Chosen Kinematic Characteristics of Take-Off in Ski Jumping / Jost B., Vodigar J. // Kinesiology. Journal of Human Kinetics. – 2010. – Vol. 23. – PP. 37-45. – [Electronic resource]. – Access mode: [www.johk.awf.katowice.pl/pdf/nr23/005\\_vodigar.pdf](http://www.johk.awf.katowice.pl/pdf/nr23/005_vodigar.pdf)
20. Zanevskyy I. Dependence of ski jump length on the skier's body pose at the beginning of take-off. / I. Zanevskyy, V. Banakh // Acta of Bioengineering and Biomechanics. – 2010. – Vol. 12 – No. 4 – P. 77-85.
21. Zatsiorsky V. M. Kinetics of human motion / V. M. Zatsiorsky. – Champaign, Il. : Human Kinetics, 2002. – 654 p.

### List or references

1. Golubev K. P. Ispol'zovanie trampolinov s iskusstvennym pokrytiem / K. P. Golubev, A. A. Pyetuhov // Lyzhnyj sport. – 1982. – № 1. – S.41-43. (Rus.)
2. Lavrov V. Kontrol' za tehnikoj vypolnenija pryzhkov na lyzhah s trampolina / V. Lavrov // Lyzhnyj sport. – 1979. – № 1. – S. 16-19. (Rus.)
3. Petushyns'kyy B. Do problemy udoskonalennya tekhnichnoyi maysternosti sport-smeniv / B. Petushynskyy // Moloda sportyvna nauka Ukrayiny : zb. nauk. prats' z haluzi fiz. kul'tury i sportu. – L., 2008. – T. 1. – S. 244-249. (Ukr.)

**Додаток 1.** Кінематичні параметри завершальної фази відштовхування у стрибках на лижах з трампліна

Таблиця Д1

### Довжина стрибка ( $L$ ) і параметри пози лижника в момент вистрибування

| №  | $L$ , м | $a^\circ$ | $b^\circ$ | $g^\circ$ | $Y^\circ$ | $j^\circ$ | $q^\circ$ | $k^\circ$ | $z^\circ$ | $\zeta^\circ$ | $w^\circ$ | $n^\circ$ | К%  |
|----|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------|-----------|-----------|-----|
| 1  | 2       | 3         | 4         | 5         | 6         | 7         | 8         | 9         | 10        | 11            | 12        | 13        | 14  |
| 1  | 44,5    | 90,0      | 153,8     | 93,6      | 44,2      | 24,5      | 6,5       | 29,8      | 89,8      | 94,4          | 79,0      | 102,6     | 99  |
| 2  | 46,5    | 69,0      | 118,4     | 68,2      | 29,7      | -4,8      | 1,0       | 18,9      | 81,0      | 86,0          | 69,3      | 99,6      | 48  |
| 3  | 48,0    | 77,0      | 135,5     | 106,9     | 35,2      | 29,5      | 18,2      | 48,4      | 86,8      | 90,8          | 80,2      | 98,1      | 78  |
| 4  | 51,5    | 78,6      | 133,6     | 86,3      | 42,9      | 5,8       | 8,2       | 31,4      | 85,7      | 89,9          | 75,8      | 100,4     | 72  |
| 5  | 52,0    | 70,5      | 115,4     | 67,7      | 26,9      | -4,3      | 26,9      | 22,8      | 83,8      | 88,6          | 72,2      | 102,7     | 102 |
| 6  | 53,5    | 56,7      | 115,8     | 95,7      | 27,7      | 12,0      | 12,4      | 36,6      | 74,7      | 79,9          | 68,2      | 89,0      | 7   |
| 7  | 58,0    | 73,0      | 141,2     | 99,3      | 45,1      | 11,2      | 10,7      | 31,1      | 78,8      | 83,2          | 70,3      | 91,8      | 24  |
| 8  | 58,0    | 65,7      | 125,9     | 97,8      | 44,4      | 20,8      | 7,3       | 37,6      | 79,8      | 84,2          | 73,2      | 92,6      | 31  |
| 9  | 59,0    | 73,4      | 133,9     | 82,4      | 21,1      | 2,8       | 8,7       | 21,9      | 81,0      | 85,6          | 70,8      | 96,1      | 44  |
| 10 | 60,0    | 78,6      | 149,6     | 100,2     | 33,4      | 10,5      | 7,1       | 29,2      | 81,0      | 85,2          | 72,0      | 93,4      | 37  |
| 11 | 61,0    | 66,4      | 133,6     | 97,9      | 30,1      | 10,6      | 3,6       | 30,7      | 75,7      | 80,7          | 66,9      | 88,3      | 8   |

Продовження таблиці Д1

| 1  | 2    | 3    | 4     | 5     | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14  |
|----|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| 12 | 62,5 | 56,8 | 117,4 | 86,8  | 15,9 | -7,8 | 19,5 | 26,2 | 73,3 | 78,0 | 65,1 | 88,2 | -15 |
| 13 | 63,0 | 67,1 | 122,6 | 85,0  | 36,7 | 16,3 | 2,7  | 29,5 | 80,1 | 84,5 | 71,2 | 95,8 | 33  |
| 14 | 63,5 | 54,1 | 124,4 | 97,7  | 45,9 | 29,0 | 28,2 | 27,5 | 69,5 | 74,1 | 63,2 | 81,4 | -40 |
| 15 | 64,0 | 71,7 | 135,9 | 94,6  | 35,8 | 15,5 | 12,8 | 30,4 | 79,6 | 84,0 | 71,6 | 92,4 | 31  |
| 16 | 64,5 | 66,1 | 126,7 | 97,1  | 32,5 | 17,6 | 6,7  | 36,4 | 78,9 | 83,5 | 71,7 | 92,5 | 27  |
| 17 | 64,5 | 61,5 | 117,4 | 80,2  | 11,3 | -4,1 | 11,1 | 24,3 | 77,2 | 82,1 | 68,7 | 93,1 | 18  |
| 18 | 64,5 | 63,0 | 120,0 | 86,1  | 18,1 | 3,5  | 13,8 | 29,1 | 77,5 | 82,4 | 69,5 | 92,0 | -19 |
| 19 | 67,5 | 64,0 | 125,2 | 90,4  | 37,6 | 20,0 | 5,4  | 29,1 | 77,3 | 81,9 | 69,0 | 92,2 | 14  |
| 20 | 67,5 | 61,6 | 121,8 | 78,5  | 28,5 | 3,6  | 13,1 | 18,3 | 74,5 | 79,7 | 65,2 | 90,5 | 7   |
| 21 | 67,5 | 59,4 | 128,1 | 100,5 | 24,3 | 3,4  | 13,2 | 31,8 | 72,6 | 77,5 | 65,9 | 84,7 | -11 |
| 22 | 67,0 | 63,9 | 125,0 | 92,4  | 11,7 | 10,8 | 8,8  | 31,3 | 77,8 | 82,0 | 70,6 | 91,9 | 14  |
| 23 | 69,0 | 63,1 | 129,1 | 96,8  | 25,1 | -5,2 | 2,4  | 30,8 | 75,7 | 80,1 | 68,5 | 88,1 | 0   |
| 24 | 70,0 | 64,3 | 136,7 | 116,0 | 47,1 | 16,4 | 16,5 | 43,6 | 76,1 | 80,6 | 70,9 | 85,8 | 2   |
| 25 | 70,0 | 62,0 | 121,6 | 91,4  | 35,9 | -3,5 | 4,4  | 31,8 | 76,9 | 81,4 | 68,9 | 92,0 | 9   |
| 26 | 70,5 | 68,8 | 135,2 | 104,1 | 44,8 | 25,1 | 10,3 | 37,7 | 79,1 | 83,6 | 72,1 | 91,5 | 26  |
| 27 | 71,5 | 60,3 | 119,7 | 92,2  | 35,4 | 1,0  | 20,6 | 32,8 | 77,2 | 81,8 | 70,3 | 90,7 | 15  |
| 28 | 71,5 | 61,9 | 128,2 | 100,0 | 42,4 | 10,7 | 11,4 | 33,8 | 75,2 | 80,1 | 67,8 | 87,9 | 7   |
| 29 | 72,0 | 59,2 | 124,7 | 95,1  | 33,6 | 2,9  | 7,5  | 29,6 | 74,2 | 79,2 | 66,4 | 87,9 | -2  |
| 30 | 72,0 | 57,6 | 118,8 | 96,0  | 37,0 | 15,1 | 5,1  | 34,8 | 76,0 | 80,6 | 70,4 | 89,0 | 7   |
| 31 | 72,0 | 65,6 | 122,5 | 94,1  | 42,3 | 26,7 | 8,7  | 37,2 | 79,6 | 84,1 | 72,8 | 93,4 | 32  |
| 32 | 72,5 | 63,7 | 133,0 | 107,8 | 42,6 | 19,0 | 2,1  | 38,5 | 75,9 | 80,7 | 69,8 | 87,1 | 10  |
| 33 | 74,5 | 63,6 | 129,5 | 96,5  | 36,7 | 2,3  | 9,7  | 30,5 | 75,2 | 79,5 | 67,3 | 89,4 | -9  |

Таблиця Д2

Швидкості тіла лижника в момент вистрибування (с<sup>-1</sup>)

| № | $\eta_x$ | $\eta_y$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\epsilon$ | $\zeta$ | $\eta$ | $\theta$ | $\iota$ | $\kappa$ | $\lambda$ |
|---|----------|----------|----------|---------|----------|----------|------------|---------|--------|----------|---------|----------|-----------|
| 1 | 2        | 3        | 4        | 5       | 6        | 7        | 8          | 9       | 10     | 11       | 12      | 13       | 14        |
| 1 | 1,05     | 2,52     | 1,34     | 7,61    | 8,59     | 10,14    | 13,25      | 1,50    | 2,32   | -1,05    | -1,18   | 0,18     | -2,54     |
| 2 | -0,32    | 2,21     | 0,61     | 2,51    | 2,15     | 3,51     | 1,85       | -0,32   | 0,25   | 0,35     | 0,84    | -0,18    | 1,10      |
| 3 | -0,33    | 1,09     | 4,31     | 9,47    | 5,24     | 3,67     | 7,55       | 0,77    | 0,08   | -0,13    | -1,00   | -0,21    | -0,73     |
| 4 | -2,99    | 1,62     | 3,14     | -1,02   | -0,07    | 6,27     | 3,36       | -8,49   | 4,09   | 2,60     | 3,07    | 2,87     | 2,32      |
| 5 | -0,59    | 0,38     | 2,72     | 0,15    | -2,11    | 12,12    | 9,42       | 3,43    | 0,47   | 0,70     | 0,58    | 0,47     | 1,28      |
| 6 | 1,94     | 1,50     | -5,38    | 2,67    | 9,74     | 1,64     | 0,29       | 5,38    | 1,68   | -3,05    | -2,10   | -1,56    | -5,21     |
| 7 | 0,69     | 2,11     | 2,02     | 10,73   | 10,05    | 8,21     | 7,65       | 4,34    | 1,34   | -0,68    | -1,52   | -0,16    | -2,24     |

Продовження таблиці Д2

| 1  | 2     | 3    | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
|----|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 8  | 0,57  | 1,85 | 3,42  | 4,40  | 3,06  | 8,93  | 10,04 | 2,45  | 2,08  | -0,21 | 1,27  | -0,21 | -0,25 |
| 9  | 0,36  | 0,04 | 1,88  | 5,99  | 6,56  | 4,51  | -1,26 | 0,18  | 2,45  | -1,06 | -0,24 | -1,48 | -0,98 |
| 10 | 2,22  | 1,68 | 1,30  | 9,22  | 9,60  | 5,98  | -6,14 | -0,07 | 1,68  | -2,36 | -2,63 | -1,58 | -3,69 |
| 11 | -1,03 | 2,63 | -0,29 | 10,13 | 12,42 | 2,86  | 2,53  | 1,53  | 2,01  | -3,06 | -2,60 | -2,33 | -4,90 |
| 12 | 3,02  | 2,81 | 1,78  | 5,40  | 7,05  | 5,79  | -2,18 | -4,25 | 3,43  | -2,45 | -1,88 | -2,56 | -3,91 |
| 13 | -1,04 | 1,61 | 0,59  | 3,49  | 5,88  | 2,44  | -4,87 | 13,30 | 2,98  | 0,80  | 0,32  | 1,13  | 0,92  |
| 14 | 0,55  | 1,48 | 3,72  | 5,28  | -1,44 | -1,24 | 8,35  | 1,14  | -2,99 | 1,58  | 0,89  | 0,50  | 2,35  |
| 15 | 2,22  | 1,68 | 4,72  | 9,93  | 9,79  | 6,41  | -1,53 | -5,93 | 4,58  | 0,75  | 1,00  | 1,69  | -1,26 |
| 16 | -0,21 | 2,02 | 3,53  | 5,67  | 1,96  | 4,06  | -6,45 | 0,90  | -0,18 | 0,59  | 0,52  | -0,17 | 1,11  |
| 17 | -0,18 | 1,90 | -0,26 | 2,14  | 2,36  | 2,50  | 0,12  | -3,04 | -0,04 | 1,42  | 1,76  | 1,09  | 1,36  |
| 18 | -0,30 | 1,89 | -2,84 | 7,15  | 11,69 | -1,11 | 6,80  | -1,70 | 1,70  | -2,12 | -1,59 | 0,42  | -3,12 |
| 19 | 0,53  | 3,45 | 0,08  | 5,96  | 7,88  | 4,42  | -3,81 | 13,86 | 2,00  | -0,61 | -1,38 | 0,66  | -1,68 |
| 20 | -0,37 | 2,11 | 2,59  | 6,43  | 7,22  | 7,24  | 3,60  | -4,52 | 3,38  | 1,55  | 2,12  | 2,31  | 0,57  |
| 21 | -0,14 | 1,01 | 4,30  | 9,39  | 10,89 | -3,57 | -10,1 | 7,90  | 5,79  | 0,29  | 0,96  | 0,97  | -1,55 |
| 22 | -0,39 | 2,53 | 2,93  | 12,78 | 10,66 | -0,38 | -5,55 | 1,42  | 0,82  | 1,52  | 0,60  | 0,75  | -3,31 |
| 23 | 3,06  | 3,80 | -2,17 | 9,80  | 9,85  | 3,93  | 1,38  | -4,61 | -2,12 | -3,94 | -5,39 | -2,84 | -5,84 |
| 24 | -0,32 | 2,99 | 6,30  | 15,81 | 16,86 | 1,30  | -5,48 | 10,39 | 7,36  | 0,71  | 0,91  | 1,47  | -1,89 |
| 25 | 0,95  | 2,72 | 1,83  | 8,58  | 6,43  | 3,86  | 1,26  | -12,3 | -0,32 | -1,76 | -1,84 | -1,97 | -3,65 |
| 26 | 0,36  | 2,68 | 2,46  | 9,58  | 4,66  | -1,86 | -2,98 | 5,29  | -2,46 | 0,01  | -0,01 | -0,59 | -0,27 |
| 27 | 1,41  | 2,01 | -3,74 | 6,78  | 6,69  | 5,60  | -2,73 | -0,48 | 3,64  | -1,92 | -1,82 | -0,04 | -4,38 |
| 28 | 4,68  | 1,67 | 0,13  | 11,42 | 9,73  | -1,03 | -0,55 | -4,55 | -1,56 | -3,80 | -3,46 | -3,31 | -5,46 |
| 29 | 2,43  | 2,71 | -0,69 | 7,40  | 4,46  | 2,26  | 2,01  | -9,92 | -3,63 | -1,83 | -2,31 | -2,03 | -2,94 |
| 30 | -2,13 | 1,99 | 7,02  | 11,70 | 14,53 | 11,81 | 1,91  | 12,38 | 9,86  | 3,45  | 3,31  | 4,67  | 1,08  |
| 31 | -0,65 | 2,43 | 8,00  | 7,43  | 3,23  | 4,87  | 3,23  | 10,81 | 3,81  | 1,93  | 2,87  | 2,04  | 1,29  |
| 32 | 1,70  | 3,24 | 2,98  | 12,42 | 9,35  | 4,04  | 4,57  | -3,36 | -0,08 | -1,72 | -1,67 | -1,84 | -3,18 |
| 33 | 1,47  | 1,64 | 1,87  | 12,90 | 6,90  | 11,10 | 15,12 | -10,6 | -4,14 | -2,89 | -3,50 | -3,18 | -4,84 |

**Додаток 2.** Тригонометричні формули для визначення суглобних кутів і кутів, які використовуються як параметри пози тіла лижника [20]

Кут у гомілковостопному суглобі –

$$a = \arctg \frac{y_p - y_s}{x_s - x_p} \quad (Д1)$$



Кут у колінному суглобі –

$$b = a + \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_f}{x_s - x_f} . \quad (\text{Д2})$$

Кут у кульшовому суглобі –

$$g = b - a + \operatorname{arctg} \frac{y_f - y_b}{x_b - x_f} . \quad (\text{Д3})$$

Кут нахилу тулуба, тобто відрізка прямої, яка проходить через осі кульшового й плечового суглобів, до напрямку руху лижника (горизонталі) –

$$k = g + a - b . \quad (\text{Д4})$$

Кут нахилу голови відносно тулуба –

$$q = k + \operatorname{arctg} \frac{y_e - y_b}{x_e - x_b} . \quad (\text{Д5})$$

Кут у плечовому суглобі –

$$y = k - \operatorname{arctg} \frac{y_a - y_b}{x_b - x_a} . \quad (\text{Д6})$$

Кут у ліктьовому суглобі –

$$j = \operatorname{arctg} \frac{y_m - y_a}{x_a - x_m} + y - k . \quad (\text{Д7})$$

Кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла і центр стопи –

$$\zeta = \operatorname{arctg} \frac{y_{gp} - y_C}{x_C - x_{gp}} . \quad (\text{Д8})$$

Кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через загальний центр мас тіла й вісь гомілковостопного суглоба –

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y_p - y_C}{x_C - x_p} . \quad (\text{Д9})$$

Кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі кульшового й гомілковостопного суглоба –

$$n = \operatorname{arctg} \frac{y_p - y_f}{x_f - x_p} . \quad (\text{Д10})$$

Кут нахилу до напрямку руху лижника відрізка прямої лінії, яка проходить через осі гомілковостопного й плечового суглобів –

$$w = \operatorname{arctg} \frac{y_p - y_b}{x_b - x_p} . \quad (\text{Д11})$$

**КИНЕМАТИКА  
ЗАВЕРШАЮЩЕЙ ФАЗЫ ОТТАЛКИВАНИЯ  
В ПРЫЖКАХ НА ЛЫЖАХ С ТРАМПЛИНА**

**Владимир БАНАХ, Игорь ЗАНЕВСКИЙ**

*Львовский государственный университет  
физической культуры*

**Аннотация.** Целью работы было создание модели техники отталкивания на основе кинематических параметров тела лыжника в момент отрыва от стола трамплина. Подобраны кинематические параметры, которые характеризуют технику лыжника в завершающей фазе отталкивания, и определена их информативность относительно длины прыжка. Выявлены обобщённые факторы техники исполнения завершающей фазы отталкивания. На основе факторного анализа установлено, что кинематика тела лыжника в момент выпрыгивания может быть смоделирована на основе трёх обобщённых факторов, которые учитывают девять параметров. Обоснованы варианты модели техники отталкивания с учётом точности и практического удобства её применения в технической подготовке прыгунов на лыжах с трамплина.

**Ключевые слова:** прыжки на лыжах с трамплина, отталкивание, кинематические параметры, модель спортивной техники.

**KINEMATICS  
OF THE TAKING OFF COMPLETING PHASE  
IN SKI JUMPING FROM THE SPRINGBOARD**

**Volodymyr BANAKH, Ihor ZANEVSKYY**

*Lviv State University of Physical Culture*

**Annotation.** The aim of the work was to create the model of repulsion technique on the basis of the kinematical parameters of the body of skier at the moment of launch from the table of a springboard. The kinematical parameters, which characterize skier's technique in the completing phase of repulsion, are selected, and their informativeness relatively long leap is determined. The generalized factors of the technology of the performance of the completing phase of repulsion are revealed. On the basis of the factor analysis, it was established that the kinematics of the body of skier at the moment of taking off can be modelled on the basis of three generalized factors, which consider nine parameters. The versions of the model of repulsion technique taking into account of accuracy and practical convenience in its application in the technical training of ski jumpers from the springboard are substantiated.

**Key words:** leaps on skis from the springboard, repulsion, kinematic parameters, model of the sport technique.

*Стаття надійшла до редколегії 25.07.2011*