«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Завідувач кафедрою
Інформатики, кінезіології та кіберспорту
________________І.П. Заневський
(підпис,ініціали,прізвище)
_____________________20___ __р

# ЛЕКЦІЯ №4
## з навчальної дисципліни

**«КОМП'ЮТЕРНА ТЕХНІКА І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

# Тема: *Елементи теорії ймовірностей*

## Навчальний потік

_ для студентів першого року навчання факультетів: фізичної культури і спорту, педагогічної освіти, терапії та реабілітації

**Навчальна мета:** Ознайомити студентів з первинними поняттями теорії ймовірностей, випадковою подією, Випадковою змінною та її числовими характеристиками, функціями розподілу ймовірності випадкової змінної.

**Виховна мета:** Розвивати увагу, логічне мислення, пам'ять, спостережливість, зацікавити математичною статистикою як наукою, розширювати кругозір з математичної статистики в галузі ФКіС, а також формувати систематизовані знання з математичної статистики.

**Навчальні питання і розподілення часу:**

Вступ ________________________________ -15…хв.

1. Первинні поняття теорії ймовірностей.__15 хв.

2. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події.___15хв.

3. Випадкова змінна та її числові характеристики.__15хв.

4. Функція розподілу ймовірності випадкової змінної.___15хв

Заключення та відповіді на запитання ______- 15…хв.

**Навчально-матеріальне забезпечення**

Мультимедійний проектор_____

**Навчальна література**

**Основна:**


1. Ільків О.С. Матвіїв В.І. Інформатика та комп’ютерна техніка (з елементами математичної статистики): Навч. посіб. –Львів: ЛДУФК, 2010.
2. Бакушевич Я.М., Капаціла Ю.Б. Інформатика та комп'ютерна техніка. -К.: Магнолія, 2024.
3. Буйницька О. Інформаційні технології та технічні засоби навчання. Навч. посіб. -К: цент навч. лі-ри, 2019.
4. Глинський Я.М. Інформатика: підручник.- Львів: Львівська політехніка, 2023.
5. Качан О.В. Упровадження інноваційних технологій у фізкультурнооздоровчу та спортивну діяльність закладів освіти: навчально-методичний посібник Слов’янськ: Витоки, 2022.
6. Руденко В.М. Математична статистика. Навч. посіб. -К: цент навч. лі-ри, 2019.
7. Пасічник В.В., Пасічник О.В., Басюк Т.М., Думанський Н.О. Основи інформаційних технологій. Навч. посіб, 2020.
8. Windows 2010: навчальний посібник / Укладач: Дячук С. Ф. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2021.
9. О. Л. Тоцька. Сучасні інформаційні технології в професійній діяльності: лабор. практикум – Луцьк: Вежа-Друк, 2020.


**Допоміжна:**


1. Заневський І. П., Заневська Л. Г. Комп’ютерні та інформаційні технології в активній рекреації й спортивно-оздоровчому туризмі: навч. посіб. для магістрів фіз. виховання. – Л.: ЛДУФК, 2010.
2. Є В. Павлиш, Л. Гліненко, Н. Шаховська Основи інформаційних технологій і систем- Львів: Львівська політехніка, 2018.
3. Сусіденко В. Інформаційні системи і технології в обліку. Навч. посіб. –К.: центр навч. лі-ри, 2019.
4. Сорока П.М., Харченко В.В., Харченко Г.А. Інформаційні системи і технології в управлінні організацією: Навч. посіб. – К.: ЦП «Компринт», 2019.
5. Г. Кармелюк Теорія ймовірностей та математична статистика. Навч. посіб. –К.: центр навч. лі-ри, 2019.
6. Антомонов М.Ю. Математична обробка та аналіз медико-біологічних даних. 2-е видання- Київ: МІЦ «Мединформ», 2018.
7. Microsoft Access 2016: навчальний посібник в електронному вигляді / Укладачі В.О. Нелюбов, Ю.Ю. Білак. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2019.
8. Нелюбов В. О., Куруца О. С. Основи інформатики. Microsoft Excel 2016: навчальний посібник. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2018.
9. Основи інформаційних технологій: навч. посібник для здобувачів професійної освіти / А. М. Гуржій, Л. І. Возненко, Н. І. Поворознюк, В. В. Самсонов. -Київ: Літера ЛТД, 2023.


**1. Інформаційні ресурси інтернет**


1. http://www.nbuv.gov.ua – Національна бібліотека України ім. В.І. Вернадського.

**2.** Закон України «Про доступ до публічної інформації» (2022). Вилучено з https://ips.ligazakon.net/document/T112939

3.Основні положення статистичних досліджень у спорті
https://vseosvita.ua/.../osnovni-polozenna-statisticnih-doslidz...

**4.** МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА
liber.onu.edu.ua/pdf/matem_stat.pdf


## Тема 4. Елементи теорії ймовірностей

1. Первинні поняття теорії ймовірностей.
2. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події.
3. Випадкова змінна та її числові характеристики.
4. Функція розподілу ймовірності випадкової змінної.
5. Інтервальної оцінки генеральних характеристик.
6. Закон нормального розподілу.

7. Основні властивості нормального закону розподілу результатів вимірів.
8. Властивості форм розподілу і їх залежність: асиметрія та ексцес.

На попередніх лекціях ми розглядали емпіричні розподіли і методи обчислення їх статистичних характеристик. Але обробіток експериментальних даних не обмежується цими методами. Переважно, дослідник, одержавши експериментальні дані в одній або декількох експериментальних групах і визначивши загальні числові характеристики хоче знайти відповідь на питання:

- Наскільки точно отримані результати можна узагальнити для більш широкої вибірки (наприклад, для всіх спортсменів даного віку і кваліфікації)?

- Наскільки достовірна різниця експериментальних даних отриманих в різних експериментальних групах або в одній і тій же, але в різні проміжки часу?

- Чи існує взаємозв'язок між різними ознаками, які досліджуємо, і якщо так, то який він?

Тому, **методи математичної статистики**, які дають відповідь на ці питання розроблені **в теорії ймовірностей (вірогідності).**

Теорія вірогідності виникла як наука з переконання, що в основі масових випадкових подій лежать детерміновані закономірності. Теорія вірогідності вивчає дані закономірності.

Наприклад: визначити однозначно результат випадання "орла" або "решки" в результаті підкидання монети не можна, але при багатократному підкиданні випадає приблизно однакове число "орлів" і "решок".

**Випробуванням** називається реалізація певного комплексу умов, який може відтворюватися необмежене число разів. При цьому комплекс умов включає випадкові чинники, реалізація якого в кожному випробуванні приводить до неоднозначності результату випробування.

Наприклад: випробування - підкидання монети.

Результатом випробування є <u>подія</u>. Подія буває:

Достовірна (завжди відбувається в результаті випробування);

Неможлива (ніколи не відбувається);

Випадкова (може відбутися або не відбутися в результаті випробування).

Наприклад: При підкиданні кубика неможлива подія - кубик стане на ребро, випадкова подія - випадання який або грані.

Конкретний результат випробування називається **елементарною подією.**

В результаті випробування відбуваються тільки елементарні події.

Сукупність всіх можливих, різних, конкретних результатів випробувань називається **простором елементарних подій.**

Наприклад: Випробування - підкидання шестигранного кубика. Елементарна подія - випадання грані з “1” або “2”.

Сукупність елементарних подій це **простір елементарних подій**.

**Складною подією** наз. довільну підмножину простору елементарних подій. Складна подія в результаті випробування наступає тоді і тільки тоді, коли в результаті випробувань відбулася елементарна подія, що належить складному.

Таким чином, якщо в результаті випробування може відбутися тільки одне елементарна подія, то в результаті випробування відбуваються всі складні події, до складу яких входять ці елементарні.

Наприклад: випробування - підкидання кубика. Елементарна подія - випадання грані з номером “1”. Складна подія - випадання непарній грані.

Введемо наступні позначення:

$A$ - подія;

$P(A)$ – ймовірність події

$\omega$ - елементи простору $\Omega$;

$\Omega$ - простір елементарних подій;

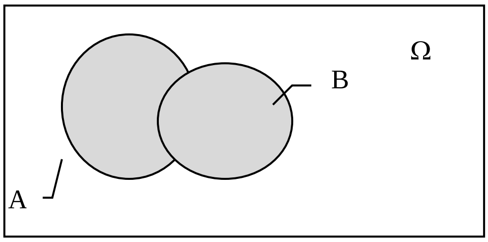
$U$ - простір елементарних подій як достовірна подія;

V - неможлива подія.

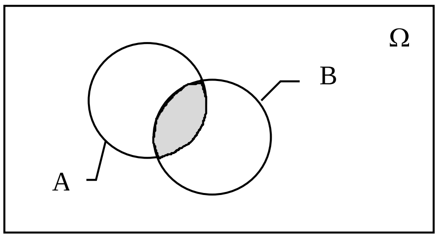
Іноді для зручності елементарні події позначатимемо Ei, Qi.

**Операції над подіями.**

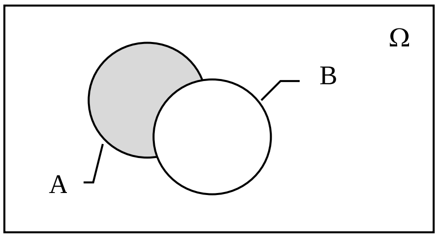
1. **Подія С називається сумою А+В**, якщо вона складається зі всіх елементарних подій, що входять як в А, так і в В. При цьому якщо елементарна подія входить і в А, і в В, то в С вона входить один раз. В результаті випробування подія С відбувається тоді, коли відбулася подія, яка входить або в А або в В. Сума довільної кількості подій  складається зі всіх елементарних подій, які входять в одне з Ai, i=1 ..., m.




2. **Подія С є твором А і В,** якщо вона складається зі всіх елементарних подій, що входять і в А, і в В. Твором довільного числа подій  називається подія що складається з елементарних подій, що входять у все Ai, i=1 ..., m.

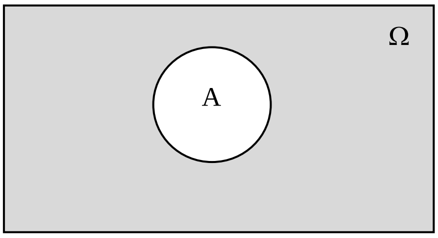



3. **Різницею подій А-В** називається подія С, що складається зі всіх елементарних подій, що входять в А, але що не входять в В.




4. Подія  наз. **протилежною події А,** якщо воно задовольняє двом властивостям.

Формули де Моргана: $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$ **і** $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$




5. Події А і В називаються **несумісними**, якщо вони ніколи не можуть відбутися в результаті одного випробування.

Події А і В називаються **несумісними,** якщо вони не мають загальних елементарних подій.

C=AB=V

Тут V - порожня множина.

На основі відомих величин вибіркової характеристики можна визначити інтервал, в якому з тою чи іншою вірогідністю визначається параметр генеральної сукупності.

Інтервал, в якому із заданою вірогідністю знаходиться оцінюваний генеральний параметр, **наз. інтервалом довіри.**

$$\overline{X}\,_{виб} - m \times t \leq \overline{X}\,_{ген} \leq \overline{X}\,_{виб} + m \times t\,,$$

де $\overline{X}\,_{ген}$, $\overline{X}\,_{виб}$- середнє арифметичне генеральної (вибіркової) сукупності;

*m* – помилка репрезентативності;
*t* – критерій надійності Стьюдента.

Для визначення вірогідності β використовується рівень істотності (α):

У практиці ФВіС проведення суцільних обстежень генеральної сукупності (наприклад, параметрів фізичного стану студентів всієї країни) практично здійснити неможливо. Тому проводять розрахунковим шляхом інтервальної оцінки генеральних характеристик (середнього арифметичного, дисперсії і т.д.) на основі даних вибіркової сукупності і закону нормального розподілу.

Оцінка границь інтервалу довіри генерального середнього здійснюється з певною вірогідністю β = (1-α)* 100 % з використанням

*t*-критерію Стьюдента: $t(\alpha,\nu)=\dfrac{\bar{x}-\mu}{S_{\bar{x}}}$

де $\mu$ – генеральне середнє;

$t_{(\alpha,\nu)}$– *t*-критерій Стьюдента;

$S_{\bar{x}}$ – стандартна похибка середнього арифметичного.

Величина критерію відповідає *t*-розподілу Стьюдента, який знаходиться за таблицею критичних значень критерію Стьюдента з врахуванням числа ступенів свободи ($\nu = n - 1$) і рівня значущості ($\alpha$).

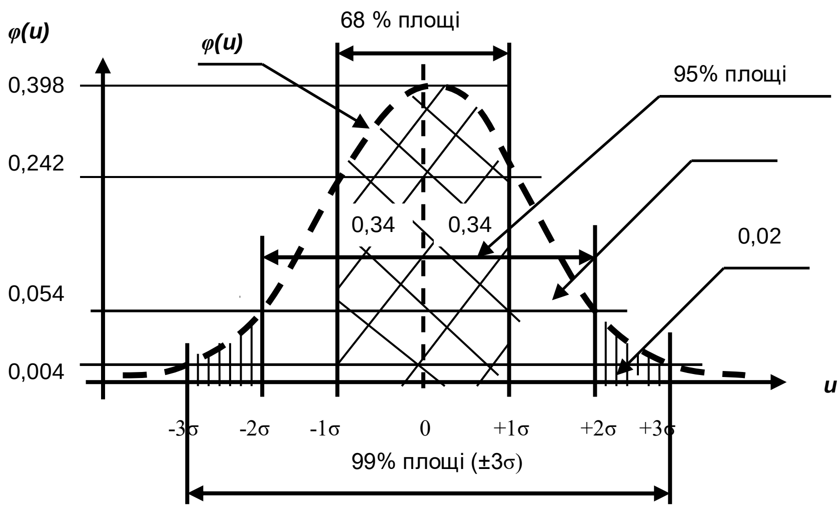



Рис.3. Щільність нормального закону розподілу ознаки.

**Нормальний розподіл (розподіл Ґауса)** — розподіл ймовірностей випадкової величини, що характеризується **густиною (щільністю) ймовірності** описується формулою, яка запропонована англійським математиком Муавром в 1733р.:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

де π, е – математичні константи (π = 3,141; е =2,7182);

$\mu$ – генеральне середнє;

$\sigma$ - середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності;

$x_i$ – результат вимірів.

Розподіл дуже великої вибірки наз. **розподілом генеральної**

**сукупності** або **теоретичним**, а розподіл експериментального ряду вимірів – **емпіричним.**

Криву розподілу можна отримати з графіка полігона розподілу при нескінченно великому числі вимірів і інтервалів. Деколи при емпіричному розподілі отримують криву, яка відрізняється від нормального закону розподілу присутністю двох або більше вершин. Це так звані **багатомодальні розподіли (чи багатовимірний Гаусів розподіл).**

**Закон розподілу** часто використовується для характеризування випадкової величини, яка має велику кількість реалізацій і показує множину можливих подій з ймовірностями їхнього настання.

**Який розподіл називається нормальним?**

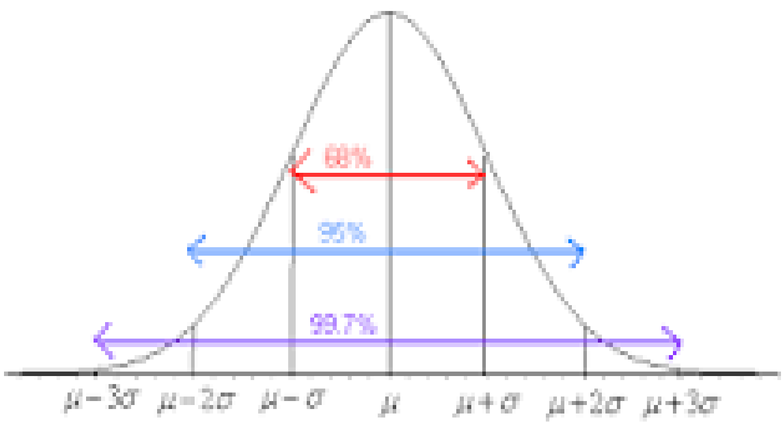
**Розподіл** — розташування, розміщення чого-небудь.

Розподіл у якому всі три міри центральної тенденції збігаються – тобто середнє = медіані = моді, **наз. нормальним.**

Існує спеціальний симетричний розподіл форми, який називається **нормальним розподілом (або розподілом Гауса).**

**Розподіл Гауса:** Будь-який розподіл повинен відповідати нормальному.

**Графічний вигляд**: Він високо посередині, а потім швидко і однаково опускається на обох кінцях. Він схожий на дзвіночок, тому іноді його називають **дзвінкоподібною кривою**.




**Однією з властивостей** нормального розподілу є те, що воно симетрично щодо середнього.

**Розподіл є:**

- **баготомодальний -** (багато низьких і багато високих показників);
- **двохмодальний –** (має дві моди)
- **рівномірний -** (в кожному інтервалі однакова кількість показників):
- **невизначений**

**Основні властивості нормального закону** розподілу результатів вимірів:

1. Крива розподілу має дзвоноподібну форму, симетричну відносно центра групування , з точками перегину, абсциса яких віддалена від $\bar{x}$ на величину $\sigma$ .

2. Значення медіани і моди нормального розподілу співпадають і дорівнюють середньому арифметичному (Me = Mo = $\overline{X}$ ).

3. Нормальний розподіл повністю визначається двома параметрами: $\mu$, $\sigma$ – генеральне середнє і середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності, відповідно;

4. 99,73 % результатів вимірів знаходяться в інтервалі ($x \pm 3\sigma$) (див. рис. 3). Цю властивість для нормального розподілу називають "правилом трьох сигм" і використовують для вилучення сильно віддалених результатів вимірів, які вважають "помилковими" і у подальшому дослідженні не враховуються.

5. Коефіцієнт асиметрії та ексцесу нормального розподілу рівні нулю. ($S_к = 0$ і $E_x = 0$). Позитивні та негативні значення цих параметрів свідчать про порушення форми розподілу; відповідно, чим більшими є їхні абсолютні значення, тим меншою є ймовірність того, що дані розподілені за нормальним законом.

Різноманітність статистичних сукупностей - передумова різних форм співвідношення частот і значень варіативної ознаки. Асиметрія та ексцес — дві пов'язані з варіацією властивості форми розподілу.

**За своєю формою** розподіли поділяються:

- **одновершинні**

- **багатовершинні** (коли розподіл має дві, три та більше вершин).

Наявність двох і більше вершин свідчить про неоднорідність вибірки, про поєднання в ній груп з різними рівнями ознаки. У такому разі необхідно більш ретельно проаналізувати наявну вихідну інформацію, перегрупувати дані, виділивши однорідні групи.

Розподіли якісно **однорідних сукупностей**, як правило, одновершинні. Серед одновершинних розподілів є **симетричні та асиметричні (скошені), гостровершинні та плосковершинні**.

Крива емпіричного розподілу не завжди ідеально дзвоноподібна (нормальна) і симетрична. Для багатьох розподілів має місце характерний зсув вершини кривої вліво чи вправо. Тому розрізняють **лівосторонню і правосторонню асиметрію** (рис. 5).

**Міра скошеності ($S_к$)** – це найбільш простий показник асиметрії кривої розподілу. В основу визначення її покладено відхилення середнього арифметичного від моди:

$$S_k = \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$$

Mo – мода ;

$\sigma$ - середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності;

Якщо знак даного виразу від'ємний *($\overline{X}$ <Mo),*- **асиметрія правостороння;** якщо додатній *($\overline{X}$ >Mo)* – **лівостороння.**

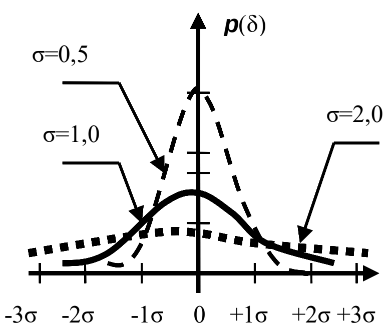


Рис.4. Залежність форми від σ.

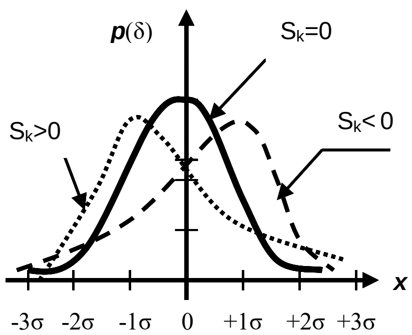


Рис.5. Залежність форми від скосу.

Найпростішою мірою асиметрії є відхилення від середнього арифметичного медіани чи моди. У симетричному розподілі рівновіддалені від центра значення ознаки мають однакові частоти, при цьому середнє, мода та медіана мають однакові значення $\overline{X}$ = Мо = Ме;

в асиметричному – вершина розподілу зміщена.

Напрям асиметрії протилежний напряму зміщення вершини.

- Якщо вершина зміщена вліво, то це правостороння асиметрія. У цьому випадку $\overline{X}$ > Ме > Мо.
- Якщо вершина зміщена вправо, то це лівостороння асиметрія. В цьому випадку $\overline{X}$ < Ме < Мо.

Асиметрія виникає внаслідок обмеженої варіації в одному напрямі або під впливом домінуючої причини розвитку, яка веде до зміщення центру розподілу.

Очевидно, що в симетричному розподілі коефіцієнт асиметрії – ($S_к$=0), при правосторонній асиметрії – ($S_к$ >0),

при лівосторонній – ($S_к$<0).

Коефіцієнти асиметрії і ексцесу нормального розподілу дорівнюють нулю ($S_к$ = 0 і $E_x$ = 0).

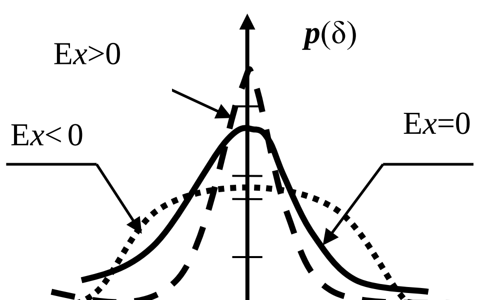
Гостровершинність розподілу відображає скупченість значень ознаки навколо середньої величини та наз. **ексцесом.**

**Коефіцієнт ексцесу** характеризує гостроту вершини кривої розподілу і розраховується за формулою:

$$E_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma^4} - 3$$

Якщо Ех > 0, то розподіл має гострий пік – **гостровершинність,**

якщо Ех< 0, то розподіл має **плосковершинну** форму порівняно з нормальним розподілом (рис. 6).



На практиці часто в одному розподілі поєднуються всі названі особливості, а саме: одновершинний розподіл може бути симетричним та гостровершинним, або плосковершинним з лівосторонньою асиметрією, або гостровершинним з правосторонньою асиметрією тощо.

## Питання для самоконтролю:

1. Яким чином здійснюється оцінка границь інтервалу довіри генерального середнього?
2. Що визначає крива нормального розподілу?
3. Назвіть основні властивості нормального закону розподілу результатів вимірів.
4. Дайте визначення поняттю «міра скошеності».
5. За якими формулами вираховують коефіцієнти асиметрії і ексцесу?

## *Самостійна робота:*

1. Вірогідність статистичних висновків, рівень істотності.
2. Оцінка параметрів генеральної сукупності.
3. Деякі спеціальні розподіли (Стьюдента, Фішера, "Хі-квадрат").

**Лекцію розробили**: к.пед. н., доц. О.С. Ільків

**Обговорено на засіданні кафедри:** інформатики, кінезіології та кіберспорту

Протокол від ____________________________20______р. № ___________