



**УДК 616-089.843:616.718.5/6**

# МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ХОДЬБИ ЛЮДИНИ З ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИМ ПРОТЕЗОМ ГОМІЛКИ

**Мирослав ДЕМИДЮК**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України,  
Львівський національний університет  
імені Івана Франка, м. Львів, Україна*

Розглядаємо ходьбу людини (по нерухомій горизонтальній поверхні) з електромеханічним протезом гомілки. Основними складниками такого протеза є стопа, остов (тримальний модуль), приймальна гільза та два електромеханічні сервоприводи. Стопа зв'язана з остовом циліндричним шарніром, передня частина стопи за допомогою циліндричного шарніра з'єднана з основою стопи. Протез за допомогою приймальної гільзи кріпиться до кукси ампутованої гомілки. Керування протезом відбувається за допомогою двох сервоприводів, які (відповідно до ритмічних фаз ходьби) повертають передню частину стопи відносно стопи та стопу відносно остова протеза. Сервопривід складається з електродвигуна (постійного струму з автономним живленням), редуктора та мікроконтролера. Мікроконтролер забезпечує формування відповідного керування – електричної напруги, яка подається на вхід електродвигуна.

Метою запропонованого дослідження є побудова алгоритму розрахунку керувань сервоприводів протеза за умови наближення ходьби людини з протезованою гомілкою до ходьби в нормі (ходьби зі здоровими кінцівками).

Обмежимося дослідженням динаміки опорно-рухового апарату людини в сагітальній площині. Для моделювання ходьби використовуємо плоску систему дев'яти твердих тіл, які представляють корпус та дві чотириланкові нижні кінцівки (стегно, гомілку, дволанкову стопу). Тіла послідовно зв'язані між собою ідеальними циліндричними шарнірами. Протез моделюємо трьома твердими тілами, які представляють остов (з приймальною гільзою), основну частину стопи та передню частину стопи. Стопи (збереженої кінцівки та протеза) вважаємо безінерційними, а їхні маси – зосередженими в гомілковостопних шарнірах [1].

Рух механічної системи відбувається внаслідок взаємодії моментів м'язових сил у збережених суглобах ніг людини, моментів сил, що генеруються сервоприводами протеза, сил реакцій поверхні крокування та сили тяжіння. Динаміка досліджуваної електромеханічної моделі описується сукупністю таких співвідношень: а) сім нелінійних диференціальних рівнянь (2-го порядку); б) чотири умови кінетостатичної рівноваги безінерційних стоп; в) чотири диференціальних рівняння (1-го порядку), які описують електромагнітні процеси в електродвигунах і баланс електромагнітних сил та сил навантаження на вихідних валах сервоприводів [2].

Протезовану ходу людини досліджуємо на проміжку подвійного кроку  $[0, T]$ , вважаючи її періодичною (за кутами й кутовими швидкостями ланок системи) та антропоморфною (як збереженої, так і протезованої кінцівки) [1].

Введемо позначення:  $L$  – довжина подвійного кроку,  $q(t)$  – вектор узагальнених координат системи,  $u(t)$  – вектор керувань (електричних напруг) сервоприводів,  $u \in U$  – множина допустимих керувань, які можуть реалізуватися сервоприводами,  $\psi(t)$  – вектор міжланкових кутів у основних суглобах ніг,  $\psi^{(0)}(t) \leq \psi(t) \leq \psi^{(1)}(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\psi^{(0,1)}(t)$  – задані функції, які виражають обмеження антропоморфного характеру,  $E$  – механічні енерговитрати системи на проміжку  $[0, T]$ .

Сформулюємо задачу оптимізації: для заданих параметрів подвійного кроку  $L, T$  визначити такий рух системи  $q^*(t)$  і керування сервоприводів  $u^* \in U$ , які за накладених обмежень мінімізують комбінований функціонал  $k_1 E + k_2 \|u_v - u\|_{L_2} \rightarrow \min$ .

У введеному функціоналі параметри  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , – вагові коефіцієнти,  $u_v$  – вектор «віртуальних» керувань сервоприводів, які можуть генерувати зусилля, необхідні для ходи людини в «нормі». Перший доданок у функціоналі виражає принцип енергетичної мінімальності [2], другий доданок оцінює нев'язку між допустимим керуванням  $u \in U$ , і «уявним» керуванням  $u_v$ .

Нехай множина допустимих керувань  $U$  складається з кусково постійних функцій (часу) з вектором параметрів  $c$ . Для побудови наближеного розв'язку сформульованої задачі використовуємо метод параметричної оптимізації (у просторі узагальнених координат системи). Відповідно до кількості ступенів вільності системи на введених ритмічних фазах руху стоп, частину узагальнених координат апроксимуємо кубічними згладжувальними сплайнами з невідомими параметрами у вузлах дискретизації відповідного часового проміжку, які приймаємо за параметри оптимізації (вектор  $g$ ). Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, отримуємо залежність динамічних характеристик системи від введених параметрів оптимізації. Накладені на рух системи обмеження (на міжланкові кути та опорні реакції) задовольняємо процедурою зовнішніх штрафних функцій, попередньо зобразивши ці обмеження у відповідній інтегральній формі. За параметризованими (у наведений спосіб) динамічними характеристиками системи та співвідношеннями математичної моделі сервоприводів знаходимо відповідні керування  $u$ , які також є залежними від вектора  $g$ . У результаті вихідну задачу оптимального керування зводимо до задачі нелінійного програмування:  $\min_{g, c} \Phi(g, c)$ , де  $\Phi(g, c)$  – функція, до якої зводиться цільовий функціонал. Для розв'язання отриманої задачі використовуємо стандартні числові процедури оптимізації.

**Ключові слова:** ходьба людини, протез гомілки, електромеханічний сервопривід, параметрична оптимізація, нелінійне програмування.

## Список використаних джерел

1. Berbyuk V., Demydyuk M., Lytwyn B. Mathematical Modeling and Optimization of Walking of Human Being with Prosthesis of Crus. *J. of Automation and Information Sciences*. 2005. Vol. 37. Is. 6. P. 46–60.
2. Демидюк М. В., Литвин Б. А. Математичне моделювання та відновлення ходи людини з електромеханічним екзоскелетом. *Прикладні проблеми механіки і математики*. 2019. Вип. 17. С. 147–159.