



УДК 612.13:611.018.5

ГЕМОДИНАМІКА. ОДИН ІЗ ПІДХОДІВ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШИРЕННЯ КРОВІ В М'ЯКИХ ТКАНИНАХ ЖИВИХ ОРГАНІЗМІВ

**Ярослав П'ЯНИЛО¹, Анатолій ЛОПАТЬЄВ^{1,2},
Ганна ЛЯНЦЕ¹, Андрій ВЛАСОВ², Юрій ХОРКАВИЙ³**

*¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, м. Львів, Україна*

*² Львівський державний університет фізичної культури
імені Івана Боберського, м. Львів, Україна*

*³ Львівський національний медичний університет
імені Данила Галицького, м. Львів, Україна*

Кровоносні судини є закритою системою трубок, по яких кров тече від серця до тканин і знову до серця. Рух крові здійснюється судинами під дією сил, що зумовлені нагнітальною функцією серця. Опір кровоплину менше залежить від в'язкості крові, а найбільше зумовлений діаметром судин, переважно артеріол.

Судини поділяються на аорту, артерії, артеріоли, капіляри, вени, порожнисті вени та характеризуються діаметром про-
світу, товщиною стінки, загальною площею поперечного перерізу,

вмістом крові. Наша увага буде в основному прикута до капілярів, які мають діаметр просвіту 5 мкм, товщину стінки 1 мкм (10–6 м).

Стінка всіх артерій складається з трьох оболонок: зовнішня оболонка сполучної тканини (адвентиція); середня оболонка гладких м'язів (медіа); внутрішня, що містить ендотелій та сполучну тканину (інтіма). У стінках аорти та інших магістральних артерій є порівняно багато еластичних волокон. Вони розтягуються під час систоли і набувають попереднього стану під час діастоли. Стінка артеріол має менше еластичних волокон і набагато більше гладких м'язів. М'язові тканини за рахунок зв'язків з нервовими волокнами мають властивість розширювати або звужувати судини, що забезпечує опір течії крові, деякі зміни їхнього просвіту зумовлюють значні порушення загального периферійного опору.

Артеріоли розділяються на менші судини з м'язовою стінкою, які відповідно переходять у капіляри. Діаметр капілярів становить приблизно 5 мкм на артеріальному кінці та 9 мкм на венозному. Загальна площа стінок капілярів у дорослої людини перевищує 6300 м².

У будь-який час тільки 5 % крові, що циркулює, міститься в капілярах, однак ці 5 % є в деякому розумінні найбільш важливою частиною об'єму крові, оскільки саме через стінки капілярів кисень та поживні речовини проникають в інтерстиційну рідину, а вуглекислий газ і продукти метаболізму повертаються в кровообіг. Обмін, що відбувається через капілярну стінку, є життєво важливим для тканин. Отримати точні показники тиску крові та течії в капілярах проблематично. Стінка капіляра є тонкою мембраною, що складається з ендотеліальних клітин. Транспортування через капіляри може відбуватися за допомогою дифузії та фільтрації. Дифузія є кількісно набагато важливішою щодо часу обміну поживних речовин і продуктів метаболізму між кров'ю і тканиною. Концентрація кисню і глюкози у крові є вищою, ніж у інтерстиційній рідині, і тому ці речовини дифундують в інтерстиційну рідину, тоді як вуглекислий газ рухається у протилежному напрямі.

Рівень фільтрації у будь-якому місці капіляра залежить від рівноваги сил, які називають силами Старлінга. Однією з цих сил є гідростатичний градієнт (різниця гідростатичного тиску в капілярі та інтерстиційній рідині у цьому місці). Тиск інтерстиційної рідини

відмінний у різних органах. Інша сила – градієнт осмотичного тиску через стінку капіляра (різниця колоїдного осмотичного тиску плазми та колоїдного осмотичного тиску інтерстиційної рідини). У тканинах, що перебувають у стані спокою, кров переважно тече через сполучні судини з артерій до венули. Капілярний тиск може значно змінюватися, у деяких капілярах він становить 32 мм рт.ст. на артеріальному кінці та 15 мм рт.ст. на венозному. Капіляри є короткими, однак кров рухається повільно (приблизно 0,07 см/с), оскільки загальна площа поперечного перерізу велика. Час проходження крові від артеріального до венозного кінця у капілярі середнього розміру становить 1–2 с.

Для математичного моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах у літературі використовують два підходи: 1) моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження або 2) моделювання м'яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процесу фільтрації. Доцільно моделювати рух крові в м'яких тканинах пористими середовищами, в яких роль пор відіграють капіляри, а поширення крові реалізується як процес фільтрації, описаний рівняннями в частинних похідних.

Відомо, що в рівняннях, які описують поширення крові в капілярах, параметри стану та коефіцієнти дифузії залежні від тиску крові. Оскільки капілярів є багато, то моделювати рух крові в кожному капілярі зокрема і на тій основі визначати тиск в певному об'ємі практично неможливо. Одним із підходів до розв'язання цього питання є аналіз ділянки, в якій наявні капіляри у вигляді пористого середовища, де виконується закон Дарсі. У дослідженні авторів побудовано математичну модель для визначення розподілу тиску в ділянці з капілярами, яка має форму порожнистого циліндра. Сформульована крайова задача та отримано аналітичний розв'язок.

Значну кількість праць у сфері гемодинаміки присвячено математичному моделюванню руху крові в судинах з урахуванням особливостей самого процесу. Моделювання руху крові в капілярах стосується незначна кількість робіт, зокрема була побудована математична модель процесу поширення крові в капілярах у плоскому випадку.

Велика кількість живих організмів мають форму судин, близьку до циліндричної. Тож з деяким наближенням для вивчення

ефективності пропонованого підходу вважатимемо, що процес поширення крові відбувається в пористому циліндрі заданої довжин і діаметра. У цьому разі м'які тканини трактуватимемо як пористе середовище, в якому роль пор відіграють капіляри. Тоді процес поширення крові можна описати рівняннями фільтрації.

Метою дослідження є побудова математичної моделі розподілу тиску крові в м'яких тканинах живих організмів, дослідження її адекватності на основі проведення числових експериментів.

Основні результати. Потрібно знайти в порожнистому циліндрі розподіл тиску, який описується звичайним рівнянням параболічного типу за таких початкових і граничних умов: тиски на внутрішній та зовнішній поверхнях порожнистого циліндра можна вважати сталими, рівним деякому значенню p_{00} ; на торцевих поверхнях задано або постійні тиски різних знаків, або швидкості поступлення крові; початковий розподіл тиску вважається сталим.

Слід зауважити, що крайові умови вибирають так за умов збереження балансових рівнянь. Оскільки торцеві умови є ненульовими, то розв'язок доцільно шукати у вигляді

$$p(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, t) \cos \frac{n\pi z}{l}, \quad p_n(r, t) = \frac{1}{l} \int_0^l p(r, z, t) \cos \frac{n\pi z}{l} dz.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів $p_n(r, t)$ отримано таке диференціальне рівняння в частинних похідних та проведено числовий експеримент.

$$\frac{\partial p_n(r, t)}{\partial t} = k \left[\frac{\partial^2 p_n(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_n(r, t)}{\partial r} + \frac{n\pi}{2l} p_n(r, t) \right] + \frac{k}{n\pi} [(-1)^n p'_z(r, l, t) - p'_z(r, 0, t)].$$

Висновок. Результати числового експерименту підтверджують ефективність пропонованого підходу для моделювання розподілу тиску в м'яких тканинах живих організмів.

Список використаних джерел

1. C. G. Caro, T. J. Pedley, R. C. Schroter, and W. A. Seed, *The Mechanics of the Circulation*, Oxford Univ. Press, Oxford (1978).
2. L. G. Loitsyanskii, *Mechanics of Liquids and Gases*, Pergamon Press, Oxford (1966).
3. T. J. Pedley, *The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1980)
4. Ya. D. Pyanylo Mathematical modeling of mass transfer in complex engineering and biomedical systems *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 273, No. 1, June, 2023 p.163–180
DOI 10.1007/s10958-023-06492-08.