УДК 66.021

МОДЕЛЮВАННЯ МАСОПЕРЕНОСУ В СКЛАДНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

Ганна ЛЯНЦЕ[1], Ярослав П'ЯНИЛО[1], Ольга ІВАЩЕНКО[2], Галина П'ЯНИЛО[1], Анатолій ЛОПАТЬЄВ[3]

[1] *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Україна*
[2] *Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, Україна*
[3] *Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, Україна*

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є пористі середовища циліндричної форми із заданими параметрами в яких відбуваються процеси фільтрації рідин або газів.

Результати досліджень. Значна частина природних об´єктів та живих організмів має пористу структуру, в яких здійснюються різні процеси. До них можна зарахувати процеси гемодіалізу, масопереносу у рослинах, процеси масопереносу вуглеводнів в підземних покладах, водоносні пласти та пласти підземних сховищ газу тощо. Часто геометрія пористих середовищ є близькою до прямокутних або циліндричних форм. Масоперенос у таких складних пористих середовищах описують диференціальними рівняннями в частинних похідних. Якщо форма пористого середовища близька до циліндричної, то для опису масопереносу доцільно використовувати циліндричні координати, рівняння в яких має такий вигляд [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 p^j}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p^j}{\partial r}+\frac{\partial^2 p^j}{\partial z^2}\right),$$

де позначено $k=\frac{p_0}{D}$, $D=\frac{m\mu}{k}$, індекси відповідно j=1 для рідини та j=2 для газу. Подане вище рівняння є нелінійним. Роз’язати його можна різними шляхами. Перший – лінеаризувати вихідне рівняння, що дає змогу побудувати аналітичний розв’язок. Уточнення розв’язку можна проводити по-різному. За j=2 лінеаризацію проводять таким чином. Реалізують ітераційний процес на основі рівняння [2,3]

$$\frac{\partial p}{\partial t}=kp_1\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right),$$

де p_1 значення тиску на попередньому кроці, яке уточняється на кожному наступному кроці. На деякому просторово-часовому проміжку використовують апроксимацію $p^2 = a + bp$ та отримують таке рівняння:

$$\frac{\partial p}{\partial t}=kb\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)+\Delta p,$$

де доданок

$$\Delta p=k\left[\frac{\partial^2(p^2-a-bp)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(p^2-a-bp)}{\partial r}+\frac{\partial^2(p^2-a-bp)}{\partial z^2}\right]$$

визначає нев’язку, яка дає змогу ітераційно уточнювати знайдений розв’язок на попередньому кроці.

Розв’язок рівняння для першого способу лінеаризації знайдено у вигляді ряду [3]

$$p(r,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} p_n(r,t)\cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right),$$

за таких крайових умов: початковий розподіл тиску p_{00}; на внутрішній поверхні циліндра $p(a,z,t)=p_a e^{\sigma z}$, на зовнішній поверхні $p(b,z,t)=p_b e^{\sigma z}$, гранична умова на торцях циліндра

$$\partial p/\partial z\big|_{z=0}=\partial p/\partial z\big|_{z=l}=0\,.$$

Розв’язок сформульованої крайової задачі має вигляд [1]:

$$p_n(r,t)=\frac{u_{na}\ln(b/r)+u_{nb}\ln(r/a)}{\ln(b/a)}-$$

$$\pi\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left\{u_{na}J_0(a\eta_{ni})-u_{nb}J_0(b\eta_{ni})\right\}\, J_0(a\eta_{ni})U_0(r\eta_{ni})}{J_0^2\,(a\eta_{ni})-J_0^2\,(b\eta_{ni})}exp(-k_1\eta_{ni}t)\,,$$

де $J_i(\eta_m r)$ – функція Бесселя дійсного аргументу порядку i $Y_i(\eta_m r)$ – функція Неймана порядку i η_{ni} – корінь рівняння:

$$J_0\,(a\eta_n)\,Y_0(b\eta_n)-J_0(b\eta_n)\,Y_0(a\eta_n)=0\,,$$

та

$$u_{na}=\frac{p_a}{l}\frac{\sigma}{\sigma^2+(n\pi/l)^2}\left[(-1)^n e^{\sigma l}-1\right];$$

$$u_{nb}=\frac{p_b}{l}\frac{\sigma}{\sigma^2+(n\pi/l)^2}\left[(-1)^n e^{\sigma l}-1\right].$$

Висновок. Отримані результати дають можливість оцінювати розподіл тиску в складному пористому середовищі, що має форму пустотілого циліндра залежно від радіуса та висоти циліндра. Водночас вважають, що розподіл тиску не залежить від кутової координати. Результати досліджень можна бути використотувати для моделювання процесу фільтрації вуглеводнів в зоні свердловин, моделювання розподілу тиску крові в м’яких тканинах живих організмів [4–6] тощо.

Список використаних джерел

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / Чарный И. А. – Москва, 1963. – 397 с.
2. П’янило Я. Д. Дослідження неусталеного руху газу в пористих середовищах / П’янило Я. Д. // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2004. – Вип. 2. – С. 178–184.
3. Притула Н. М. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи) / Притула Н. М., Пянило Я. Д., Притула М. Г. // – Львів : Растр-7, 2015. – 266 с.
4. Механика кровообращения / Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. – Москва : Мир, 1981. – 624 с.
5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. – Москва : Наука, 1978. – 736 с.
6. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Педли Т. – Москва : Мир, 1983. – 400 с.