УДК 51–7:519.87

ОСНОВНІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ГЕМОДИНАМІКИ

Анатолій ЛОПАТЬЄВ[1,2], Ярослав П'ЯНИЛО[1], Андрій ВЛАСОВ[2], Галина П'ЯНИЛО[1], Олександр КАЛИНІЧЕНКО[3]

[1] *Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*
[2] *Львівський державний університет фізичної культури імені Івана Боберського, Україна*
[3] *Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнології ім. С. З. Ґжицького, Україна*

1. Математична модель процесу руху рідин у гнучких трубках з урахуванням еластичних властивостей останніх, зокрема у великих кровоносних судинах. Важливою проблемою є розрахунок параметрів руху рідини в гнучких трубках, зокрема судинах крові. Внутрішньо-судинний тиск крові є одним із основних параметрів діагностування серцево-судинної системи [1]. Артеріальний тиск є інтегральною величиною, яка залежить від об'ємної швидкості крові і опору судин. Очевидно, що поряд з цими параметрами на процес руху крові впливають, зокрема, сила гравітації, еластичність судин, траєкторія руху тощо. Вважаємо кров нестисливою рідиною, тобто $\rho = const.$ В усталеному режимі з урахуванням гравітаційної сили, гідравлічного опору та ламінарності потоку за нехтування деформації судини одновимірне рівняння руху крові має вигляд:

$$dp + \rho v dv + \lambda \frac{v^2}{2D} dx + gdh = 0 \, ,$$

де $p = p(x)$ – розподіл тиску крові вздовж судини; ρ – густина крові; v – швидкість; λ – коефіцієнт гідравлічного опору судини; x – змінна координата $x \in [0,\ell]$, ℓ – довжина судини; D – внутрішній діаметр судини; g – прискорення вільного падіння; $h = h\,(x)$ – крива, що описує траєкторію руху крові.

Якщо враховувати залежність радіуса судин від тиску

$$r = r_0\,(1 + r_0\rho \,/\, E\,\delta_0)\, ,$$

де δ_0 та r_0 – товщина і радіус судини в початковому стані, і позначити $\beta = r_0 / (E\,\delta_0)$, E – модуль Юнга і:

$$\psi_1 = \frac{\lambda\rho}{2D}\,\frac{v_0^2}{(1 + \beta p)((1 + \beta p)3 - 2\beta\rho_0 v_0}\, , \quad \psi_2 = \frac{\rho g\,(1 + \beta p)^3}{(1 + \beta p)^3 - 2\beta\rho_0 v_0}\, ,$$

то рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{dp}{dx} + \psi_2\,\frac{dh}{dx} = -\,\psi_1 \, .$$

Ітераційний алгоритм розв’язування є таким:

- для початкового значення тиску p_0 обчислюють величини ψ_1 та ψ_2;
- для заданого значення x_z визначають значення тиску $p(x_z)$;
- уточнюються величини ψ_1, ψ_2, та значення тиску;
- продовжується процес обчислення до того часу, поки різниця між двома сусідніми ітераціями стане меншою від заданої величини.

Результати обчислень добре корелюють із відомими в літературі. Підтверджується і той висновок, що на розподіл тиску в судині впливає її розміщення відносно горизонту.

2. Моделювання руху крові в судинах у неусталеному режимі. Для опису поширення крові в судинах в ізотермічному випадку за наявності джерел та стоків можна використати систему взаємопов’язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних:

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\nu^2}{2}\right)+\rho g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\lambda\rho\nu^2}{2D}+\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial(\rho\nu)}{\partial x}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t}=\Psi(x,t),$$

де c – швидкість звуку в рідині.

Функція

$$\Psi(x,t)=\frac{4}{\pi D^2}\sum_{i=1}^{J}\varpi_j(t)\,\delta(x-x_j)\left(H\left(t-t_{1,j}\right)-H\left(t-t_{2,j}\right)\right)$$

моделює наявність джерел уздовж судини в точках x_j, $j=1,2,...,J$, відводів–підводів речовин, $t_{1,j}$ *та* $t_{2,j}$ – відповідно часи ввімкнення та вимкнення масових відводів, $H(t)$ – одинична функція Хевісайда, $\delta(x)$ – дельта – функція Дірака.

3. Рух крові в м'яких тканинах. Для математичного моделювання процесу поширення крові в м'яких тканинах у літературі використовують два підходи: *1*) моделювання руху крові по капілярах з урахуванням точок розгалуження або *2*) моделювання м'яких тканин як пористих середовищ і трактування поширення крові як процес фільтрації. Гемодинамічні умови в капілярах характеризуються низьким тиском і малою швидкістю прину крові. Різні органи мають різний рівень розвитку капілярної сітки. Наприклад, у шкірі на 1 мм^2 є 40 капілярів, а в м'язах – близько 1000. Оскільки параметри капілярів (довжина, діаметр та інші) практично не вдається визначити з необхідною для розрахунків точністю, перший підхід виявляється неефективним. Доцільніше моделювати рух крові в м'яких тканинах пористими середовищами, в яких роль пор відіграють капіляри, а поширення крові реалізується як процес фільтрації, описаний рівнянням із дробовими похідними за часом у декартовій системі координат:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{kh}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=2mh\left(\frac{\partial^{\alpha}p}{\partial t^{\alpha}}+2qp_{at}\right).$$

Дробові похідні за часом зберігають «пам'ять» процесу. Тож їх доцільно застосовувати в процесах із великими перехідними часами, зокрема під час дослідження фільтраційних процесів. За Капутто дробову похідну порядку α визначено формулою [2,3]:

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} f'(\tau)\, d\tau,$$

де *Г (1–α)* – гама-функція. Дробовою похідною Рімана – Ліувіля порядку α для функції *f (t), t Є [a,b]* називають вираз

$$D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{t} (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau)\, d\tau .$$

Основними методами розв'язування крайових задач із використанням похідних дробових порядків є такі: аналітичний із використанням перетворення Лапласа; спектральні на базі класичних ортогональних многочленів; числові на базі схеми Грюнвальда – Летнікова.

Висновок. У роботі проаналізовано основні математичні моделі гемодинаміки. Особливу увагу приділено застосуванню теорії фільтрації для моделювання руху крові в капілярах та застосуванню похідних дробових порядків у теорії гемодинаміки. З'ясовано, що застосування теорії масопереносу в пористих середовищах більш ефективне за моделювання руху крові в м’яких тканинах.

Список використаних джерел

1. Механика кровообращения / Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. – Москва : Мир, 1981. – 624 с.
2. Лопух Н. Б. Числова модель фільтрації ґазу в пористих середовищах із використанням дробових похідних за часом / Лопух Н. Б., П’янило Я. Д. // Математичні методи в хімії і біології. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 98–104.
3. Самко С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.