ОРТОГОНАЛЬНІ МНОГОЧЛЕНИ В ЗАДАЧАХ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

П'янило Я.Д., П'янило Г.М., Васюник М.Є., Васюник І.Р.
Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України

Вступ. В процесі тренувань спортсменів проводяться заміри багатьох параметрів діяльності організму спортсмена, зокрема, частота сердечних скорочень; частота пульсу; значення кров'яних тисків, тощо [1-3]. Проблема обробки та використання великого обсягу накопичених даних є ключовою при моделюванні багатьох процесів на основі заміряних вхідних даних. При розробці великих баз даних акцент зміщується в сторону створення різних систем організації, зберігання та обробки цієї інформації. В результаті акумулюється гігабайти даних, які являють собою складний багаторівневий та різнорідний масив. Це приводить до того, що більша частина цієї інформації не може бути використана тими, кому вона призначена і найбільш необхідна. Таким чином, питання виділення та обробки необхідних для аналізу даних, їх представлення у зручній для сприйняття формі має надзвичайну важливість для успішного прийняття рішень [3]. Для того щоб бази даних сприяли прийняттю рішень, інформація повинна бути представлена досліднику в прийнятній формі, тобто він повинен мати розвинуті інструменти доступу до побудованих баз даних та їх обробки.

Формулювання задачі. Для вирішення прикладних задач часто застосовуються спектральні методи [4,5]. Суть цих методів розв'язування задач полягає в поданні відомих функцій і шуканих розв'язків ортогональними рядами у деяких базисах і побудові алгоритмів для обчислення коефіцієнтів (узагальнених спектрів). Спектральні методи дають можливість розв'язувати задачі в тому випадку, коли функції, які входять у математичну модель опису фізичного процесу, подаються збіжними рядами за даним базисом. Способи обчислення узагальнених спектрів (коефіцієнтів) залежать від виду вхідної інформації. У разі дискретного задання даних узагальнені спектри можна обчислювати наступним чином.

Одновимірний випадок. Нехай многочлени $u_n(x)$ ортогональні на проміжку $[a,b]$ і функція $\varphi(x)$ представляється ортогональним рядом за даними многочленами [5]

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_n}{r_n} u_n(x).$$

Відомо, що $N+1$ –ий ортогональний многочлен має $N+1$ дійсний корінь, який належить до проміжку ортогональності. Тоді для обчислення узагальнених спектрів φ_n має місце оптимальна в L_2 квадратурна формула

$$\varphi_n \approx \sum_{j=0}^{N} \rho_j^2 \, u_n(x_j) \, \varphi(x_j),$$

де x_j — корені многочлена $u_{N+1}(x)$, тобто

$$u_{N+1}(x_j) = 0, \qquad \rho_j^{-2} = \sum_{i=0}^{N} u_i^2(x_j).$$

Двовимірний випадок. У разі застосування аналітичних методів необхідно мати параметричну залежність вхідних даних від відповідних координат. Перспективним способом побудови такої залежності є використання ортогональних рядів. У літературі добре розроблені способи побудови параметричної залежності для випадку однієї змінної. У разі багатьох змінних такі способи необхідно розробляти та досліджувати.

Будемо вважати, що дискретні дані відомі в прямокутній області $x \in [x_0, x_k]$, $y \in [y_0, y_k]$ з I зосередженими значеннями відповідних величин. Шукану функцію апроксимуємо ортогональним рядом за двома змінними

$$p(x,y,0)=p_0\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)=\omega\left(\tilde{x}\right)\omega\left(\tilde{y}\right)\sum_{n,m=0}^{N,M}\frac{p_{n,m}}{r_n r_m}P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{x}\right)P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{y}\right).$$

Перехід від координат (x,y) до $\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)$ здійснюємо за формулами $\tilde{x}=\left(2x-x_0-x_k\right)/\left(x_k-x_0\right)$, $\tilde{y}=\left(2y-y_0-y_k\right)/\left(y_k-y_0\right)$, тобто $\tilde{x}\in[-1,1]$, $\tilde{y}\in[-1,1]$. Значення коефіцієнтів $p_{n,m}$ можна обчислити за заданими значеннями в заданих точках як за квадратурними формулами, так і іншими методами.

I. Метод найменших квадратів полягає в мінімізації функціоналу

$$\delta=\sum_{j=1}^{J}\left[p_0\left(x_j^0,y_j^0\right)-p_\vartheta\left(x_j^0,y_j^0\right)\right]^2, \tag{1}$$

де $p_\vartheta\left(x_j^0,y_j^0\right)$ — заміряні значення функції в точках із координатами x_j^0, y_j^0. Позначимо

$$v_{n,m}(x,y)=\mathrm{w}(x)\mathrm{w}(y)\,\frac{1}{r_n r_m}\,P_n^{(\mathrm{a},\mathrm{b})}\left(\frac{2x-x_0-x_k}{x_k-x_0}\right)P_m^{(\mathrm{a},\mathrm{b})}\left(\frac{2y-y_0-y_k}{y_k-y_0}\right).$$

Мінімум функціоналу знаходимо з умови $\dfrac{\partial\delta}{\partial p_{k,l}}=0\ \left(l,k=\overline{1,J}\right)$.

Тоді з рівності (1) дістаємо

$$\sum_{n,m=0}^{N,M}p_{n,m}\sum_{j=1}^{J}v_{n,m}\left(x_j^0,y_j^0\right)v_{k,l}\left(x_j^0,y_j^0\right)=\sum_{j=1}^{J}p_f\left(x_j^0,y_j^0\right)v_{k,l}\left(x_j^0,y_j^0\right).$$

Якщо

$$a_{n,m,l,k}=\sum_{j=1}^{J}v_{n,m}\left(x_j^0,y_j^0\right)v_{k,l}\left(x_j^0,y_j^0\right),\ \phi_{k,l}=\sum_{j=1}^{J}p_f\left(x_j^0,y_j^0\right)v_{k,l}\left(x_j^0,y_j^0\right),$$

то

$$\sum_{n,m=0}^{N,M}p_{n,m}a_{n,m,k,l}=\phi_{k,l}.$$

Останню формулу можна записати таким чином

$$\sum_{s=1}^{S} p_s a_{s,r} = \phi_r . \qquad (2)$$

Надаючи змінним $\left(x_j^0, y_j^0\right)$ відповідні значення та використовуючи відомі в цих точках заміряні значення $p_\vartheta\left(x_j^0, y_j^0\right)$, обчислюємо величини $a_{s,r}$ і Φ_r та розв'язуємо систему рівнянь (2) стосовно невідомих коефіцієнтів p_s. Система лінійних рівнянь (2) є погано обумовлена, що не дозволяє знайти достатню кількість коефіцієнтів p_s. Окрім цього, значення функції відомі, зазвичай, з невисокою точністю. Це зумовлює виникнення значної неусувної похибки під час знаходження коефіцієнтів ортогонального ряду.

2. Розглянемо інший спосіб обчислення коефіцієнтів $p_{n,m}$. Будемо вважати, що значення тиску відомі в точках $\left(\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\right)$, де $\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0$ — корені многочленів Якобі $P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{x}_j^0\right)$ та $P_{M+1}^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{y}_j^0\right)$. У такому випадку для обчислення коефіцієнтів $p_{n,m}$ можна використати формулу

$$p_{n,m} = W_N W_M \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \eta_{N,i}\, \eta_{M,j}\, P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{x}_j^0\right) P_m^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde{y}_j^0\right) p_f\left(\tilde{x}_j^0, \tilde{y}_j^0\right).$$

3. Розглянуті вище методи побудови параметричної залежності можна використати для прямокутних областей. У випадку області довільної форми, яка поміщається в прямокутну область $x \in \left[x_0, x_k\right]$, $y \in \left[y_0, y_k\right]$, для побудови параметричного подання шуканої функції можна поступити таким чином.

Нехай $x \in \left[x_0, x_k\right]$, а знизу та зверху область обмежено кривими $y = f_n(x)$ та $y = f_v(x)$. У випадку двох змінних параметричне подання узагальненого спектру Фур'є-Якобі таке

$$p_{nm} = \int_{x_0}^{x_1} \omega(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)dx \int_{f_n(x)}^{f_v(x)} \omega(y) P_m^{(\alpha,\beta)}(y) p(x,y)dy$$

Для обчислення невідомих коефіцієнтів можна використати оптимальну в класі L^2 квадратурну формулу почергово за змінною y та x. Вузли квадратурної формули за змінною y будуть міститися на прямих, що проходять через точки $\left(x_j, f_n\left(x_j\right)\right)$ та $\left(x_j, f_v\left(x_j\right)\right)$. Якщо ж вузли за змінною x виходять за межі області визначення, то значення шуканої функції продовжується нулями. Зазначимо, що в цьому випадку під час апроксимації шуканої функції необхідно враховувати явище Гіббса на границі області визначення.

Висновки.

Отримані результати дають можливість розв'язувати задачі обробки як одновимірної, так і двовимірної цифрової інформації, зокрема, фільтрації сигналів та їх апроксимації, з метою виявлення існуючих закономірностей та розв'язування виникаючих при цьому задач.

Література

1. Власов А.П., Лопатьєв А.О., Виноградський Б.А., Демічковський А.П. Аналіз рухових дій при виконанні стрілецьких вправ. // Актуальні проблеми сучасної біомеханіки фізичного виховання і спорту. — Серія: Педагогічні науки. Фізичне виховання та спорт. Вісник №81, ЧДПУ ім.. Т.Г.Шевченка.- Чернігів, 2010, С. 561-565.
2. Лопатьєв А.О., Трач В.М., Бретц К. Керування рухами людини в спорті. Матеріали X Міжнародної наукової конференції (27 лютого 2014 року, М. Львів-Харків) / Львів. Держ. Ун-т фізкультури, Харк. Нац.. ун-т ім.. Г.С.Сковороди. — Харків; «ОВС», 2014. — С. 18-26.
3. Рибак О. Ю. Застосування графічних моделей трас спеціальних ділянок ралі для корекції швидкісних стенограм // Олег Рибак, Людмила Рибак // Теорія та методика фізичного виховання. — 2012. — № 3. — С. 41—45. — Режим доступу: http://www.tmfv.com.ua/journal/article/view/779
4. П'янило Я.Д. Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу. — Львів: Сплайн, 2011. — 248 с.
5. П'янило Я.Д., П'янило Г.М. Про побудову систем підтримки прийняття рішень для автомобільного спорту.// Моделювання та інформаційні технології у фізичному вихованні і спорті: Матеріали X Міжнародної наукової конференції (27 лютого 2014 року, М. Львів-Харків) / Львів. Держ. Ун-т фізкультури, Харк. Нац.. ун-т ім.. Г.С.Сковороди. — Харків; «ОВС», 2014. — С. 16-18.