В.С. АШАНІН, В.В. ПАСЬКО

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MATHCAD В ЗАДАЧАХ ФІЗИЧНОГО ВИХОВАННЯ ТА СПОРТУ

Харків – 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ ФІЗИЧНОЇ КУЛЬТУРИ
Кафедра інформатики та біомеханіки

В.С. АШАНІН, В.В. ПАСЬКО

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MATHCAD В ЗАДАЧАХ ФІЗИЧНОГО ВИХОВАННЯ ТА СПОРТУ

Навчальний посібник
для студентів, магістрантів та аспірантів
Харківської державної академії фізичної культури

Харків – 2018

УДК 004.031:796.011(07)

ББК 32.97+75я73

А 98

Ашанін В.С., Пасько В.В. Застосування системи MathCad в задачах фізичного виховання та спорту : [навчальний посібник] / В.С.Ашанін, В.В. Пасько. – Харків : ХДАФК, 2018. – 132 с.

В навчальному посібнику представлено практичне застосування математичного процесору MathCad для проведення статистичного аналізу в задачах фізичної культури та спорту. Описані чисельні розрахунки системи MathCad: розв'язування математичних рівнянь, обробка експериментальних даних, графічне представлення даних та проведення операцій апроксимації та інтерполяції, а також представлені приклади алгоритму розв'язання складних оформлювальних задач.

Навчальний посібник призначено для студентів, магістрантів та аспірантів Харківської державної академії фізичної культури, а також фахівців, які працюють в галузі фізичного виховання та спорту.

Рекомендовано

Вченою радою Харківської державної академії фізичної культури, протокол № 12 від 24.04.2018 р.

Рецензенти: доктор біологічних наук, професор Друзь В.А.

доктор наук з фізичного виховання і спорту, професор Ровний А.С.

ЗМІСТ

ВСТУП

MathCad – є потужною системою комп'ютерної математики, що поєднує в собі візуально орієнтований вхідний язик, зручний для роботи з формулами, числами, текстами та графіками. MathCad настільки ж гнучкий, як самі потужні таблиці і мови програмування, але легкий в освоєнні і приємний у використанні. Розробником програми MathCad є фірма MathSoft Inc. (USA).

Головною перевагою MathCad є легкість та наочність розв’язання задачі, відображення складних математичних виразів в тому вигляді, в якому вони звичайно записуються на аркуші паперу, тобто відсутність спеціальної мови програмування, простота використання, можливість створення засобами MathCad звітів з таблицями, графіками та текстом.

MathCad створений як потужний інструмент, який дозволяє розв’язувати задачі, які виникають у різних галузях, у тому числі у фізичній культурі та спорту. Зокрема, розв’язування математичних рівнянь, обробка експериментальних даних, графічне представлення даних та проведення операцій апроксимації та інтерполяції.

У MathCad можна розміщувати текст у будь-яких місцях навколо рівнянь, щоб документувати процес розв’язання. Можна створювати двомірні та трьохмірні графіки, користуватися ілюстраціями з інших доповнень Windows.

MathCad має свою власну довідкову систему. Електронні книги MathCad роблять доступними для використання в робочому документі багато корисних формул, довідкових даних і діаграм простим натисканням кнопки.

Навчальний посібник присвячено описанню методів аналізу даних та їх реалізації за допомогою математичного пакету MathCad. Найбільш важливою особливістю запропонованого у навчальному посібнику матеріалу є розглядання основних методів комп’ютерної обробки даних засобами математичного процесору MathCad. При цьому викладення матеріалу ведеться від математичної постановки задач до способів її рішення на комп’ютері.

Посібник призначено для студентів, магістрантів та аспірантів Харківської державної академії фізичної культури, а також може бути рекомендований викладачам, які стикаються з необхідністю математичної обробки експериментальних даних. У посібник включено основні теоретичні відомості о таких математичних методах аналізу, як: обчислення диференціальних та інтегральних рівнянь, системи лінійних рівнянь, похідних та інтегралів, суми рядів, добутків та ітерацій, всі операції з векторами та матрицями, графічне представлення даних, експоненціальний розподіл, статистичні розрахунки, апроксимація даних. Викладення матеріалу здійснюється у наступній послідовності: спочатку приводяться основні визначення, потім дається описання алгоритму відповідних процедур у математичному пакеті MathCad, після чого розглядається рішення типових прикладів. Важливим візуальним доповненням до числових обчислень служать різні графіки та діаграми, реалізовані у математичному процесорі MathCad.

Також у навчальному посібнику запропоновані завдання для самостійної практичної роботи користувача.

1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО МАТЕМАТИЧНИЙ ПАКЕТ MATHCAD ТА ЙОГО ІНТЕРФЕЙС

1.1. Головне меню MathCad

Після того, як Mathcad встановлений на комп'ютері і запущений на виконання, з'являється основне вікно програми. Воно має ту ж структуру, що і більшість додатків Windows. Зверху вниз розташовуються заголовок вікна, рядок меню, панелі інструментів (стандартна і форматування) і робочий лист, або робоча область документу. Новий документ створюється автоматично при запуску MathCad. У самій нижній частині вікна знаходиться рядок стану. Таким чином, інтерфейс користувача MathCad схожий з іншими додатками Windows.

Крім елементів управління, характерних для типового текстового редактора, MathCad забезпечений додатковими засобами для введення і редагування математичних символів, одним з яких є панель інструментів Математика. За допомогою цієї, а також ряду допоміжних набірних панелей, зручно здійснювати введення рівнянь.

Складові елементи інтерфейсу користувача MathCad: рядок заголовку; верхнє меню або рядок меню; панелі інструментів Стандартна, Форматування, Ресурси і Елементи управління; панель інструментів Математика і доступні через неї додаткові математичні панелі інструментів; робоча область; рядок стану (рядок повідомлень); спливаючі, або контекстні, меню; діалогові вікна або діалоги; вікна ресурсів MathCad з вбудованими прикладами і додатковою інформацією.

Головне меню системи надає можливості доступу до математичних, графічних, символьних команд і до команд редагування та управління робочими аркушами.

1.2. Склад головного меню MathCad

Головне меню MathCad представлено на рис. 1.1.

Рис. 1.1. Головне меню MathCad

File (Файл) – робота з файлами, мережею Internet та електронною поштою. Призначення команд меню *Файл*:

– *Новый* – відкрити вікно нового документу;

– *Открыть* – відкрити існуючий документ;

– *Закрыть* – закрити існуючий документ;

– *Сохранить* – зберегти на диску за старою адресою;

– *Сохранить как…* – зберегти на диску з новим ім’ям;

– *Послать* – відправити засобами електронної пошти;

– *Настройки страницы* – встановити параметри сторінки;

– *Предварительный просмотр* – перегляд сторінки перед друкуванням;

– *Печать* – друкування документу;

– *Выход* – вихід з MathCad.

Edit (Правка) – редагування документів. Меню **Правка** охоплює команди виправлення тексту:

– відміна та повернення виконаних дій для подальшого редагування;

– копіювання, переміщення в буфер обміну, вставка звичайна та спеціальна;

– видалення фрагментів та виділення всіх об’єктів;

– пошук, заміна та перехід на вказану сторінку;

– перевірка орфографії;

– редагування зв’язків з об’єктом та редагування впровадженого зовнішнього об’єкта в тому додатку, в якому він утворювався.

View (Просмотр) – зміна засобів огляду і включення (виключення) елементів інтерфейсу. Меню **Просмотр** служить для керування інтерфейсом, зовнішнім виглядом робочого поля програми та для виконання таких дій:

– додавання панелі інструментів;

– додавання лінійки;

– утворення робочої області;

– масштабування та оновлення виду екрана;

– ефекти анімації;

– налаштування зв’язку з Інтернетом.

Insert (Вставка) – вставлення об'єктів та їхніх шаблонів (включаючи графіку). Меню Вставка вводить у документ такі об’єкти:

– графіки заданих типів;

– шаблони матриць, вбудованих функцій, картинки;

– області введення тексту та математичних виразів;

– зовнішні об’єкти, керуючі елементи, посилання та гіперпосилання.

Format (Формат) – зміна формату (параметрів) об'єкта. Меню **Форма**т використовується для зміни набору характеристик чи атрибутів основних об’єктів. Це меню дозволяє покращити якість оформлення робочого документа:

– відформатувати текст, формули та графіки;

– розділити та вирівняти області в двох напрямках;

– перенести лінію розбиття з ліквідацією перетину області.

Math (Математика) – керування процесом обчислень. Меню **Математика** виконує такі операції:

– обчислення та автообчислення;

– оптимізацію;

– налаштування опцій при обчисленні.

Symbolic (Символика) – вибір операцій символьного процесору. Меню **Символика** виконує такі дії:

– символьні розрахунки виразів;

– операції зі змінними та матрицями;

– інтегральні перетворення;

– налаштування стилю представлення символьних обчислень.

Window (Окно) – керування вікнами системи. Меню **Окно** керує розміщенням вікон документів програми, які можуть розташовуватися таким чином:

– вікна каскадом;

– вікна по горизонталі;

– вікна по вертикалі.

Help (Помощь) – робота з довідковою базою даних про систему. Меню **Помощь** організовує виклик довідкової інформації, інформацію про версію програми, а також доступ до ресурсів та електронних книг.

1.3. Склад панелі Математика

Панель інструментів **Math (Математика)** зображена на рис. 1.2 (додаток Б). Якщо панель інструментів **Math (Математика)** не з'являється автоматично, то її можна налаштувати завдяки використанню меню **Просмотр→Панели→Математика**.

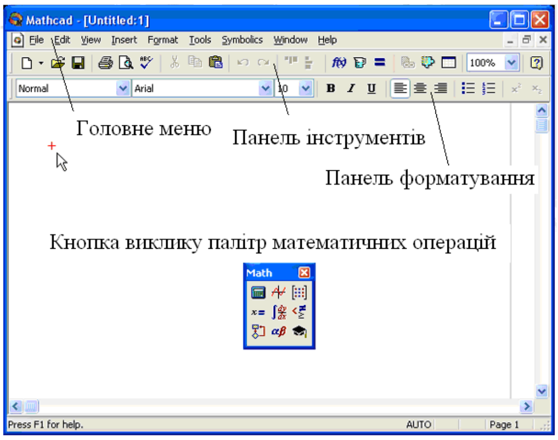


Рис. 1.2. Панель інструментів Math (Математика)

Панель **Math (Математика)** призначена для виклику на екран ще дев'яти панелей (рис. 1.3), за допомогою яких відбувається вставка математичних операцій в документи. Щоб викликати будь-яку з них, потрібно натиснути відповідну кнопку на панелі **Math**. Призначення математичних панелей:

Calculator (Калькулятор) – служить для вставки основних математичних розрахунків, отримала свою назву через схожість набору кнопок з кнопками типового калькулятора. Панель **Calculator (Калькулятор)** включає в себе цифри від 0 до 9, знаки алгебраїчних операцій, деякі елементарні функції та загально важливі константи.

Активізація кнопок панелі виводить символи з позиціями для виведення інформації. Позиції для виведення позначені затушованими прямокутниками. При введені в позицію необхідного виразу затушований прямокутник зникає.

Graph (Графики) – для вставки графіків.

Matrix (Матрицы) – для вставки матриць і матричних операторів. Матричні оператори використовують для здійснення різноманітних матричних та векторних перетворень.

Evaluation (Выражения) – для вставки операторів управління обчисленнями;

Calculus (Вычисления) – палітра містить операції вищої математики (похідні, інтеграли, границі та ін.), а також знак нескінченності.

Boolean (Логическая панель) – для вставки логічних (булевих) операторів. Булевая панель використовується для здійснення логічних операцій.

Результатом дії логічних чи булевих операторів є тільки два значення: 1 або 0: Так-Ні, **True (Истина)** – **False (Ложь)**.

Programming (Программирование) – для програмування засобами Mathcad.

Greek (Греческие символы) – для вставки грецьких символів.

Symbolic (Символика) – для вставки символьних операторів.

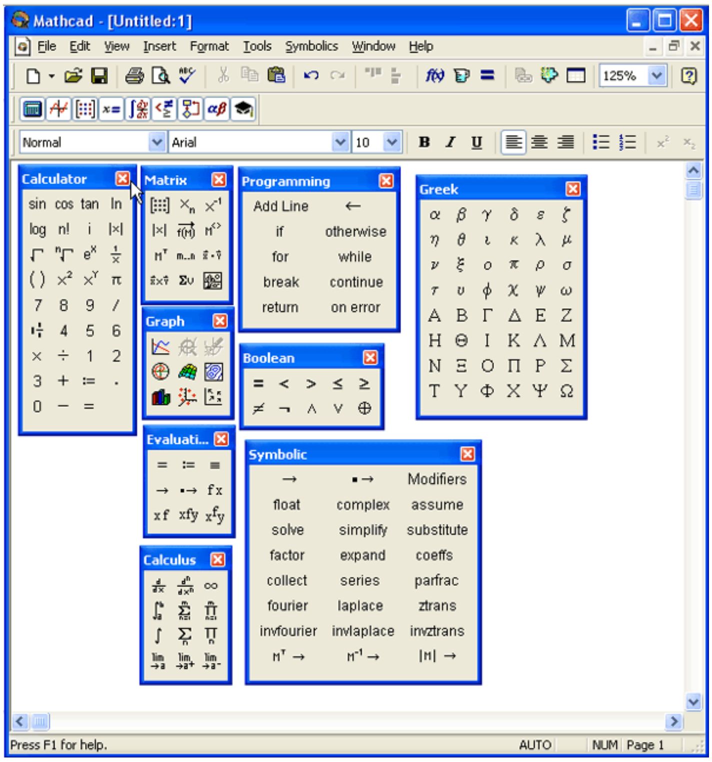


Рис. 1.3. Програмне вікно MathCad

При наведенні покажчика миші на кнопоки математичних панелей з'являється підказка, що містить ще й поєднання гарячих клавіш, натискання яких призведе до еквівалентного дії. Введення дій з клавіатури часто зручніше натискання кнопок панелей інструментів, але вимагає більшого досвіду.

Викликати будь-яку панель на екран або закреслити її можна за допомогою пункту **Toolbars (Панели инструментов)** меню **View (Вид)**. Прибрати будь-яку панель з екрану можна ще й за допомогою контекстного меню, що викликається натискання правої кнопки миші в будь-якому місці панелі (наприклад, на будь-якій кнопці). У контекстному меню слід вибрати пункт **Hide (Скрыть)**.

Після натискання кнопки панелі **Calculate (Вычислять)** розраховуються вирази, розташовані вище і лівіше курсора.

Якщо рядок **Calculate (Вычислять)** автоматично позначений галочкою, то будь-який вираз обчислюється негайно після закінчення введення, а графік будується після натискання правої кнопки миші поза полем графіків. Якщо ж позначка відсутня, то розрахунки і побудови графіків проводяться тільки після відповідної команди.

Якщо рядок **Optimization (Оптимизация)** позначена галочкою, то включено режим оптимізації обчислень. Режим оптимізації – це режим обчислень з включеним символьним процесором. В цьому режимі спочатку спрощуються всі вирази, поміщені праворуч від знака присвоєння, і тільки потім вираз обробляється числовим процесором.

Для проведення математичних розрахунків та дизайну оформлення існують наступні види документів, які можна застосовувати в MathCad (рис. 1.4): текстові області, математичні області чи формули, графіки чи графічні області, компоненти інших додатків, впроваджені об’єкти.

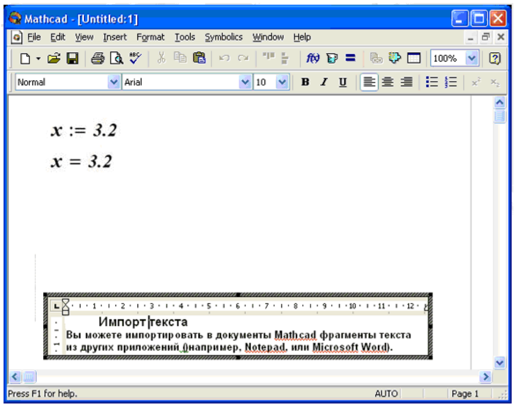


Рис. 1.4. Математична та текстові області

За межами границь областей знаходиться пуста частина документу. Окрім перелічених, бувають корисними такі додаткові елементи оформлення: закриті та виділені області – колонтитули; розмітка документів – розриви сторінок, стилі та поля; посилання; гіперпосилання (рис. 1.4).

Важливим елементом оформлення розрахунків є правильне та зрозуміле розміщення об’єктів за документом MathCad. Для впровадження того чи іншого елемента потрібно попередньо вибрати місце документа, куди він буде впроваджений.

Це здійснюється завдяки курсора введення. Потім необхідно скористатися відповідним пунктом меню **Insert (Вставка)**, або однією з панелей інструментів, або як для введення формули просто почати вводити символи з клавіатури.

Компоненти вставляються за допомогою пункту меню **Insert (Вставка)→Компонент**, а впроваджений об'єкт можна вставити, розмістивши його в буфер обміну з області іншого додатка, та після перемикання в MathCad, натиснути комбінацію клавіш **Ctrl+V**.

Для введення тексту в документ необхідно в головному меню вибрати команду **Insert (Вставка)→Текстовая область**, також можна ввести з клавіатури символ " (кавичка). При цьому на екрані з'явиться текстова область, в якій можна друкувати текст.

Ще текст можна друкувати, змінивши латинський шрифт на російський та друкувати текст прямо в математичній області. Коли надруковане перше слово, при натисканні клавіші пробілу область з надрукованим словом автоматично з математичної перетворюється в текстову.

У текстову область можна вставляти математичну область. Для цього в головному меню MathCad необхідно вибрати команду **Insert (Вставка)→Математическая область**. Вставлена математична область бере участь в обчисленнях на рівні з іншими математичними виразами.

Шрифти MathCad погано сприймають кирилицю. Зокрема, зручний по роботі в Word шрифт Times New Roman кирилицю не сприймає. З кирилицею працюють шрифти System, Ms Sans Serif та Fixedsys.

Завдяки панелі інструментів **Format (Формат)** можна форматувати текст та математичні формули.

Всі панелі можуть пересуватися звичайним способом по екрану. Алфавіт системи MathCad містить: друковані та прописні латинські та грецькі літери; арабські цифри від 0 до 9; системні змінні; оператори; імена вбудованих функцій; спецзнаки; друковані та прописні літери кирилиці (при роботі з русифікованими документами); збільшенні елементи мови: типи даних, оператори, функції користувача і керуючі структури. До типів даних відносяться числові константи, звичайні і системні змінні, масиви (вектори і матриці) і дані файлового типу.

Числові константи задаються з допомогою арабських цифр, десяткової точки (а не коми) і знака – (мінус).

Наприклад: 123 – цілочислова десяткова константа; 12.3 – десяткова константа з дробовою частиною; 12.3*10^5 – десяткова константа з мантисою (12.3) і порядком 5.

Знак множення ***** при виводі числа на екран змінюється на звичну математикам крапку, а операція піднесення до степеня (з використанням спецзнака ^) відображається шляхом представлення порядку в вигляді надрядкового елемента. Діапазон можливих значень десяткових чисел лежить в межах от 10^{-307} до 10^{307} (це машинний нуль і машинна нескінченність). Більшість обчислень система виконує як з дійсними, так і з комплексними числами, які звичайно представляються в алгебраїчному вигляді:

$$Z=Re(Z)+i*Im(Z).$$

Тут *Re(Z)* – дійсна частина комплексного числа *Z*, *Im(Z)* – його уявна частина, а символ *і* означає уявну одиницю, тобто квадратний корінь з -1. Таке представлення характерне і для системи MathCad (за винятком того, що знак рівності не є знак присвоювання). Отже, якщо *Re(Z)=2*, а *Im(Z)=3*, то комплексна числова константа в системі MathCad повинна бути задана у вигляді *2+i*3*. Однак система не завжди знає, який символ використати для позначення уявної одиниці. Тому, перед використанням будь-яких операцій з комплексними числами, корисно спочатку визначити *і* як уявну одиницю (тобто присвоїти значення квадратного кореня з -1).

Імена **змінних (ідентифікатори)** в системі MathCad можуть мати практично будь-яку довжину, і в них можуть входити будь-які латинські і грецькі літери, а також цифри. Однак починатися вони можуть тільки з літери, наприклад: *x, xl, alpha, X, coordinate*. Крім того, ідентифікатор не повинен містити пробілів. Друковані та прописні літери в іменах розрізняються.

Ім'я не повинно співпадати з іменами вбудованих функції. Для набору **+** і **–** використовуються відповідні клавіші клавіатури. Ділення набирається клавішею **/**.

Після входу в MathCad на екрані з'явиться невеликий червоний хрестик ┼, котрий позначає місце, де буде виконуватись запис. Його можна переміщувати по екрану мишкою.

При вводі будь-якого символу на місці хрестика з'явиться рамка – шаблон. Будь-який вираз (формула, рівняння і т.п.) повинно записуватись в середині одного шаблону. При переході до наступного запису перший шаблон зникне. Якщо підвести курсор до запису без шаблона і натиснути на клавішу мишки, шаблон з'явиться знову.

Видалення записів в MathCad можна виконувати декількома способами:

1. Для видалення одного або декількох виразів одночасно можна, натиснувши ліву кнопку миші, обвести всі вирази, що видаляються, пунктиром, і натиснути **Del** або **Backspace**.

2. Для видалення одного виразу можна, підвівши курсор до виразу, активувати його і, пересунувши кутик в крайній правий вираз, натиснути **Del**.

3. Для видалення одного виразу можна також, підвівши до нього курсор, активувати його, а потім виділити потрібний текст і натиснути **Del**.

Найпоширеніша помилка полягає в тому, що у процесі введення формули користувач необережно виходить з вказаної рамки введення (рамка зникає і в робочій області з'являється покажчик введення – хрест) і все одно продовжує введення. При цьому на листі замість однієї звичайно виявляються дві формули, кожна з яких – лише частина потрібної. Проблема в тому, що візуально ці дві формули можуть знаходитися близько одна до одної і виглядати як єдине ціле, але це не так. Єдиний спосіб перевірити цілісність формули – клацнути по ній мишею. Якщо все правильно, то в рамці введення опиниться вся формула.

При наборі виразу можна послідовно відміняти проведені дії, натискуючи **Ctrl+Z**. Проте слід врахувати, що в молодших версіях MathCad (до MathCad 11) відміна можлива тільки до виходу з рамки введення. Закінчити введення формули можна, або натискуючи **Enter** або **Tab**, або клацнувши мишею зовні рамки введення формули.

Якщо при введенні виразу відбулася помилка, то помилковий фрагмент буде автоматично виділений червоним кольором.

Для видалення формули достатньо виділити її (наприклад, клацнувши мишею) і натискувати **Ctrl+D**. Для переміщення формули необхідно виділити її і, вхопившись мишею за рамку введення, що з'явилася, перемістити. Можна одночасно переміщати блок формул, який необхідно заздалегідь виділити методом протягування.

2. ОСНОВИ РОБОТИ В MATHCAD

2.1. Елементарні математичні розрахунки MathCad

При роботі математичного процесора кожна незаблокована математична формула в документі MathCad приймається до виконання.

Розрахунки в MathCad здійснюються над даними, що подані в типовій формі у відповідності з характером операторів та використовуваних функцій.

Система MathCad підтримує такі **типи даних**:

1. **Іменована константа**. Число π – це числова іменована константа. Найбільш важливі константи мають власне позначення (наприклад e, % та ∞).

2. **Іменовані змінні**. Іменовані змінні діляться на звичайні та системні. Їх імена називаються *ідентифікаторами*, які складаються з латинських чи грецьких літер. Звичайним змінним хоча б один раз повинні бути присвоєні числові значення, які під час роботи можуть змінюватися. Системні змінні одержують раніш визначені системою початкові значення.

3. **Ранжовані змінні**. Ранжовані змінні є допоміжними та забезпечують діапазон значень в указаних межах при заданому кроці зміни. MathCad обчислює вирази з такою зміною по всіх її значеннях. Ітерації здійснюються без явного завдання циклу. Збереження всієї сукупності результатів досягається за рахунок індексації утворюючого масиву.

4. **Матриці та вектори**. Матриці та вектори – це одномірні чи двомірні масиви даних. Перейти до них у межах багатьох задач вдається, якщо використовувати ранжовані змінні.

5. **Файлові дані**. Дані можуть зберігатися окремо від документа в іншому файлі, що визначає суттєву різницю при роботі з ними. Файли корисні при збереженні великих об'ємів табличних даних.

Змінним надають значення за допомогою спеціального **оператору присвоєння** (:=). Ім'я змінної в шаблоні (:=) записується зліва. Оператор присвоєння передбачає передачу конкретного значення чи математичного виразу справа на ліво. Якщо в будь-якій формулі числових розрахунків не визначена та чи інша змінна, то MathCad висвітлить її червоним кольором.

Точність розрахунків можна встановити за допомогою меню **Format (Формат)→Результат**. На вкладці **Number Format** вибрати пункт **Decimal** та в полі **Number of decimal places** виставити необхідну кількість знаків після крапки (рис. 2.1).

При введені пояснень українською мовою необхідно використовувати один із шрифтів, який розуміє кирилицю, наприклад, Fixedsys, інакше програма замість букв видасть незрозумілі ієрогліфи та значки.

Точність розрахунків можна встановити за допомогою меню **Format (Формат)→Результат**. На вкладці **Number Format** вибрати пункт **Decimal** та в полі **Number of decimal places** виставити необхідну кількість знаків після крапки (рис. 2.1).

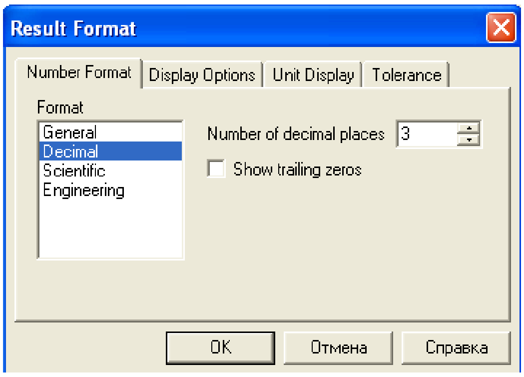


Рис. 2.1. Завдання потрібної кількості знаків після крапки

Приклад. Обчислити значення виразів:

$$1)\ \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}},\quad 3^{\sqrt{\sqrt{3}+5}},\quad e^{\log(5+1/3)};$$

$$a=1,\quad b=3.22,\quad p=\pi$$

$$2)\ c=\frac{a+b}{2},\quad d=\frac{a-b}{2},\quad g=\sin(\frac{\pi}{2}),\quad f=\frac{c^2+d^2+g^2}{\sqrt{3}}$$

У програмі MathCad розв’язок даного прикладу має вид, зображений на рис. 2.2 та 2.3.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 \qquad \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt{3}}}{\sqrt{1+\sqrt[4]{3}}} = 0.845 \qquad 3^{\sqrt{\sqrt{3}+5}} = 17.296 \qquad e^{\log\left(5+\frac{1}{3}\right)} = 2.069$$

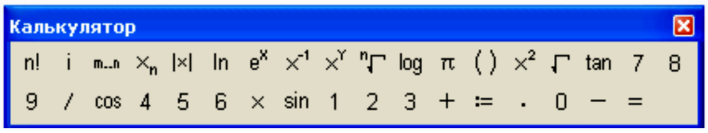


Рис. 2.2. Розв’язок першої частини прикладу

Набір виразів здійснюємо за допомогою панелі інструментів **Calculator (Калькулятор)**.

1. Присвоєння значень змінним:

$a := 1 \qquad b := 3.22 \qquad p := \pi$

2. Проведення розрахунків:

$c := \frac{a+b}{2} \qquad d := \frac{a-b}{2} \qquad g := \sin\left(\frac{p}{2}\right)$

3. Виведення результатів розрахунків:

$c = 2.11 \qquad d = -1.11 \qquad g = 1$

4. Проведення подальших розрахунків:

$$f := \frac{c^2 + d^2 + g^2}{\sqrt{3}}$$

5. Виведення результатів подальших розрахунків:

$f = 3.859$ +

Рис. 2.3. Розв’язок другої частини прикладу

При введені значення змінних необхідно деяким змінним присвоювати результати, тобто в документі програми MathCad вводити знак присвоєння, натискаючи комбінацію клавіш **Shift+:** або вибравши знак присвоєння з однієї з панелей інструментів **Math (Математика)**, наприклад, на панелі **Calculator (Калькулятор)** вибрати знак **:=**.

2.2. Спеціальні обчислення в MathCad

Спеціальні обчислення в системі MathCad включають такі операції: обчислення похідних, табуляція функцій, оператори обчислення суми і добутку, обчислення границь, розкладення функції в степеневий ряд.

2.2.1. Обчислення похідних

Система MathCad дозволяє обчислювати похідні будь-якого порядку при необмеженій кількості символьних змінних. При цьому використовуються два різних способи.

Перший спосіб ґрунтується на символьних обчисленнях. Цей спосіб виконується за допомогою команд меню **Символика→Переменные →Дифференцировать**.

Технологія реалізації цього методу базується на виконанні таких кроків: введення виразу, похідну якого необхідно знайти; виділення за допомогою подвійного клацання мишки змінної диференціювання; звертання до команд меню **Символика→Переменные →Дифференцировать**;

Після виконання команди **Дифференцировать** на екрані з'явиться значення похідної.

Для аналітичного обчислення похідної виберіть кнопку **d/dx** на панелі **Calculator (Калькулятор)**. На робочому аркуші в чорне віконце після оператора похідної впишіть вираз **(ln(x))**. Тепер введіть знак стрілки з панелі, можна набрати на клавіатурі поєднання **Ctrl+.**. Натисніть F9. Значення похідної функції буде видано у вигляді математичного виразу.

$$\frac{d}{dx}\ln(x) \rightarrow \frac{1}{x}$$

Знаходження похідної в певній точці здійснюйте за наступною схемою. Спочатку знайдіть значення похідної від заданої функції. Потім підставте значення відомої точки в цю функцію. Правильним буде і інший варіант. Задайте відоме значення точки, а потім обчисліть похідну від потрібної функції. Результат отримуйте за допомогою знака рівності.

$$f(x) := \frac{d}{dx}\left(\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$f(\pi) = -0.132$$

$$x := \pi$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sin\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = -0.132$$

Обчислення похідних вищих порядків виконуйте за допомогою кнопки **d^n/dx^n**, розташованої в панелі **Calculus (Вычисления)**. Важливо пам`ятати, що показник порядку n має бути обов`язково натуральним числом. Коли шаблон обчислення похідної з`явиться на робочому полі, введіть у відповідні чорні прямокутники значення порядку (45), змінну (x), по якій буде вироблено диференціювання, і досліджувану функцію (e^{2x}). Для отримання результату введіть знак стрілки з панелі.

$$\frac{d^{45}}{dx^{45}}e^{2x} \rightarrow 35184372088832 \cdot \exp(2 \cdot x)$$

При обчисленні пам`ятайте, що похибка при прорахунку кожного наступного порядку накопичується, наприклад, результат для похідної п`ятого порядку має точність до п`ятого знака після коми. З цієї причини не завжди має сенс використовувати чисельні методи диференціювання. Завжди перевіряйте можливість отримання аналітичного результату.

Другий спосіб ґрунтується на зверненні до маркерів введення похідної. При використанні цього способу на екрані виводиться відповідний шаблон введення, в чорні позиційні маркери вводяться вирази для функції, змінна диференціювання та порядок похідної. Для одержання розв’язку досить натиснути клавішу виводу рішення.

Технологія цього способу полягає в виконанні таких операцій: виклик на екран шаблону похідної, введення функції, змінної та порядку диференціювання, одержання результату.

Шаблон похідної можна викликати на екран за допомогою клавіатури або миші. Натиснувши комбінацію клавіш **Shift+?** чи **Shift+Ctrl+?**, одержимо на екрані шаблони відповідно першої та n-ї похідної. Того ж самого можна досягти, якщо клацнути мишею по відповідному шаблону на панелі інструментів **Калькулятор**.

Введення функції здійснюється за допомогою клавіатури у відповідності з маркерами введення. Перехід з одного позиційного маркеру в інший здійснюється натисненням клавіші **Tab** чи →, або лівої клавіші миші у відповідності з маркером введення.

Одержати результат можна шляхом натискання клавіш **Shift+F9**, також можна використовувати кнопку символьних обчислень панелі інструментів **Symbolic (Символика)**.

Приклад. Необхідно знайти похідну такої функції:

$$y(x)=\frac{x-1}{x+1}+\ln(2\cdot x)-x\cdot e^{-x}.$$

Розв'язання:

Диференціювання виразу:

$$\frac{(x-1)}{x+1}+\ln(2\cdot x)-x\cdot \exp(-x)$$

Результат диференціювання:

$$\frac{1}{(x+1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\exp(-x)+x\cdot \exp(-x)$$

2.2.2. Табуляція функцій

Табульованими є функції подані у вигляді таблиці. Табуляцію можна здійснити шляхом обчислення функції для всіх значень аргументів. Такий процес є дуже громіздким. Тому в багатьох математичних системах є функції, що дозволяють, по відомому вектору вихідних даних одержати функцію у вигляді таблиці, що утворюється з двох стовпців: *x* та *f(x).* У системі MathCad такої вбудованої функції немає, але ця задача розв'язується іншими способами.

Перший спосіб ґрунтується на виконанні таких процедур:

1. Присвоєння змінній (наприклад *x*) значень аргументів табульованої функції. При цьому крок таблиці повинен бути постійним. Змінна *x* подається в такому вигляді:

x0, x0+h....xk, де *x0* – початкове значення аргумента; *h* – крок таблиці; *xk* – кінцеве значення аргумента. Наприклад, *x* := 0, 0.2 .. 3. У такому представленні змінна *x* називається ранжованою змінною.

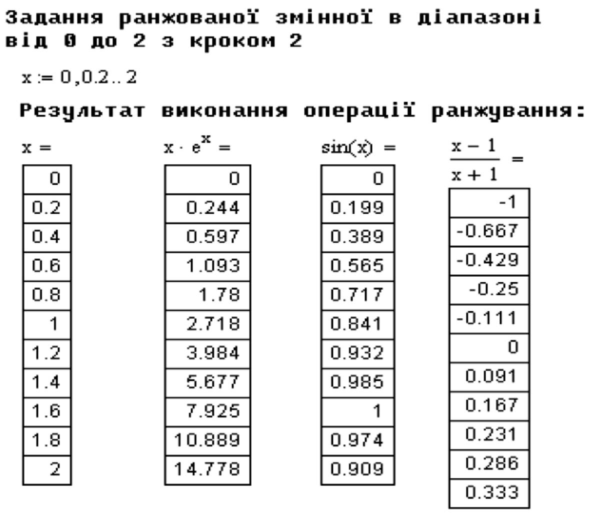
2. Введення табульованої функції, якій може бути присвоєне ім'я.

3. Одержання розв’язку шляхом натиснення клавіші =. Якщо табульованій функції було присвоєне ім’я, наприклад *f*:=, то розв’язання одержують шляхом введення символу ***f*** та натисненням на клавішу = (дорівнює).

Покажемо технологію табулювання на прикладі.

Приклад. Необхідно протабулювати функції: $x \cdot e^x$, sin *x*, $\frac{x-1}{x+1}$ діапазоні зміни аргументу від 0 до 2 з кроком 0.2.

Розв’язання:



Задання ранжованої змінної в діапазоні від 0 до 2 з кроком 2

x := 0,0.2..2

Результат виконання операції ранжування:

x =	$x \cdot e^x$ =	sin(x) =	$\frac{x-1}{x+1}$ =
0	0	0	-1
0.2	0.244	0.199	-0.667
0.4	0.597	0.389	-0.429
0.6	1.093	0.565	-0.25
0.8	1.78	0.717	-0.111
1	2.718	0.841	0
1.2	3.984	0.932	0.091
1.4	5.677	0.985	0.167
1.6	7.925	1	0.231
1.8	10.889	0.974	0.286
2	14.778	0.909	0.333

Другий спосіб використовується в тих випадках, коли крок таблиці змінний.

Технологія табулювання складається з виконання таких операцій:

1. Створюється вектор аргументу табульованої функції. Вектор створюється в такій послідовності: введення символу **:** вектору аргументів; натиснення клавіші **:**, на екрані з’явиться символ присвоєння; виклик діалогового вікна **Insert (Вставка)→Matrix (Матрицы)** для встановлення розмірів вектора аргументів шляхом натискання клавіші з зображенням матриці на панелі інструментів **Matrix (Матрицы)**; встановлення розмірів матриці; введення числових аргументів табульованої функції.

2. Вводиться табульована функція з аргументом *x*.

3. Одержання результату шляхом натиснення клавіші = (дорівнює). На екрані з’явиться відповідь у вигляді вектора значень табульованої функції.

Недоліками табуляції функцій є:

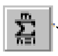
1. Неможливість табулювання одночасно декількох функцій.

2. Вектор розв’язку не містить аргументів, що ускладнює визначення значень функції при заданому значенні аргумента.

Для зручності визначення значень функцій при даних значеннях аргументів можна дублювати вектор аргументів та шляхом перетягування одержаних векторів розв’язків розташувати їх поруч.

2.2.3. Оператори обчислення суми і добутку

Оператор підсумовування обчислює суму виразів за всіма значеннями індексу. Оператор добутку працює аналогічним чином – обчислює добуток виразів за всіма значеннями індексу.

Для задавання оператора підсумовування в робочому документі перемістіть курсор на будь-яке вільне місце, потім скористайтеся панеллю інструментів **Calculus Toolbar→Summation (Оператори математичного аналізу→Підсумовування)**, кнопка ).

З'являється символ підсумовування з чотирма порожніми полями:

$$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$$

У нижньому полі ліворуч від знака = введіть ім'я змінної. Ця змінна – індекс підсумовування. Вона визначена тільки для оператора підсумовування. Поза оператором може існувати інша змінна з тим же ім'ям. У полі праворуч від знака = введіть будь-яке число, чи будь-який вираз, що набуває цілого значення. У полі над знаком суми введіть ціле число чи будь-який вираз, що набуває цілого значення. У полі, що залишилося, введіть вирази, які потребують підсумовування. Звичайно, цей вираз буде включати індекс підсумовування. Якщо він має кілька членів, використовуйте апостроф ‘, щоб створити пари круглих дужок навколо поля.

Аналогічно створюється оператор добутку. Для цього натисніть клавіші **Ctrl+Shift+3** (або **Calculus Toolbar→Iterated Product (Оператори**

математичного аналізу→Добуток), кнопка) і заповніть поля, як описано вище. Нижче наведені деякі приклади використання операторів суми і добутку. Їх можна використовувати як будь-який інший вираз Щоб обчислити кратну суму, потрібно помістити другий оператор суми в поле вираження першого оператора суми.

Приклад:

$$n := 1 .. 40 \qquad x_n := \sin(0.1 \cdot n \cdot \pi)$$

$$\sum_{n=1}^{20} n = 210 \qquad \sum_{n=1}^{10} x_n = 6.314$$

$$\prod_{n=0}^{20} (n+1) = 5.109 \times 10^{19} \qquad \sum_{n=0}^{5} \sum_{m=0}^{10} n^m = 1.37 \times 10^{7}$$

При використанні зазначених операторів індекс підсумовування повинен бути цілим і змінюватися з кроком **1**. MathCad дозволяє застосовувати узагальнення цих операторів, які можуть використовувати будь-який дискретний аргумент у якості індексу підсумовування. Для застосування цих операторів спочатку необхідно визначити дискретний аргумент.

Наприклад, знайдемо суму для дискретного аргументу **i**, що змінюється в діапазоні від **1** до **3** із кроком **0,5**, тобто суму =1+1,5+2+2,5+3. Установлюємо курсор на вільному місці, використовуємо **Shift+$** (або **Calculus Toolbar→Range Variable Summation (Оператори математичного аналізу→Підсумовування по дискретному аргументу)**, кнопка). З'явиться знак підсумовування з полями $\sum_{\blacksquare} \blacksquare$ Як вказувалося, дискретний аргумент, що використовується у цьому операторі, повинен бути визначений заздалегідь. Подальші дії аналогічні описаним вище. Результат обчислення в MathCad показаний нижче.

Приклад:

$$i := 1, 1.2 .. 3 \qquad k := 0, 2 .. 10$$

$$\sum_{i} i = 22 \qquad \sum_{k} k^2 = 220$$

2.2.4. Обчислення границь

Границі в MathCad визначаються за допомогою функції *lim*. Шаблони викликаються натискання мишки на кнопках панелі інструментів **Calculus (Вычисления)** чи за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+L**, **Ctrl+A**, **Ctrl+B**.

Символ ∞ (нескінченість) при визначені границь вводиться за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+Z** чи клацанням мишею по кнопці ∞ панелі інструментів **Calculus (Вычисления)**.

Технологія обчислення границь складається з таких кроків: введення знака *lim*; заповнення маркерів шаблону *lim*; одержання відповіді.

Приклад. Необхідно знайти границі значень таких функцій:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right];\qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left[\frac{e^x}{1-e^x}\right];$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{1/x}\right];\qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}\right].$$

Розв'язання:

2.2.5. Розкладання функції в степеневий ряд

Розкладення функції *y=f(x)* за степеневим рядом у MathCad здійснюється за формулою Тейлора, яка має вигляд:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\cdot\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\cdot\frac{f''(a)}{2!}+$$
$$+\ldots+(x-a)^n\cdot\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\ldots.$$

У формулі *a* – це значення аргумента *x*, навколо якого і відбувається розкладення функції в ряд.

У MathCad розкладання функції в степеневий ряд здійснюється за допомогою функцій меню **Symbolic (Символика)→ Переменная→Расширить до рядов**.

Технологія реалізації процедури: введення математичного виразу; виділення змінної подвійним клацанням миші; звертання за командою **Symbolic (Символика)→Переменная→Расширить до рядов**, після чого на екрані з'явиться вікно, в якому можна встановити кількість членів ряду; для одержання результату натиснути кнопку **Ок**.

При розкладанні в ряд за степенями не завжди можна одержати результату. Це трапляється в таких випадках:

1. Функція *f(x)* не має *n* похідних;

2. Ряд Тейлора є розбіжним.

3. Функція чи її похідні не можуть бути обчислені при визначених значеннях *a*.

Наприклад, функція $f(x) = x \cdot \ln(x)$ не може бути розкладена в ряд навколо точки x=0, оскільки $\ln(0)$ не існує.

При обчисленні функцій за допомогою степеневого ряду виникають помилки, пов'язані з тим, що нескінчений ряд представляється рядом з кінченим числом членів. Тому необхідно знати скільки членів ряду необхідно бути, щоб похибка не перевищувала заданого значення.

Приклад. Розкласти за степенями такі функції: *cos(x), sin(x)*

Розв'язання:

cos(x)	**sin(x)**
$1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 + O(x^6)$	$x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 + O(x^6)$

2.3. Обчислення інтегралів

Система MathCad успішно виконує задачу інтегрування. Розглянемо обчислення різних видів інтегралів. Технологія обчислення *невизначеного інтеграла* виконується при виборі відповідного шаблону з панелі інструментів

Calculus (Вычисления) або за допомогою команди меню **Symbolic (Символика)→Переменная→Интегрировать**.

Технологія обчислень *визначеного інтеграла*: виведення на екран шаблону визначеного інтеграла за допомогою панелі **Symbolic (Символика)**; введення в пусті маркери підінтегральної функції; виконання команди обчислення інтеграла.

Обчислення можливе за допомогою трьох способів виклику команд обчислення інтегралів: клавіша = (дорівнює), комбінація клавіш **Shift+F9** та виклику знаку символьних обчислень → шляхом натиснення комбінації клавіш **Ctrl+.**.

Обчислення *кратних інтегралів* у системі MathCad можно здійснювати двома шляхами.

Перший полягає в обчисленні n-кратного інтеграла, використовуючи результати попереднього розв'язку.

Наприклад, необхідно обчислити подвійний інтеграл $\iint x dx dx$. Обчислюємо спочатку інтеграл $\int x dx = x^2/2$. Тепер обчислимо інтеграл $\int (x^2/2) dx = x^3/6$ Відповідь одержана двократним обчисленням інтеграла.

Інший спосіб обчислення n-кратного інтеграла полягає в обчисленні без проміжних значень.

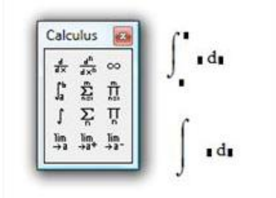
Технологія цього способу полягає в виконанні таких дій:

1. Викликати визначений чи не визначений інтеграл стільки разів, якої кратності інтеграл необхідно обчислити

2. Заповнити маркери підінтегральних функцій та їх границь.

3. Відповідь одержуємо натисненням клавіші → для невизначеного інтеграла та клавіші = визначеного.

Щоб обчислити визначений інтеграл в середовищі MathCad, потрібно надрукувати його оператор за допомогою панелі **Calculus (Вычисления)** натисканням кнопки зі значком певного інтеграла. З'явиться символ інтеграла з декількома комірками, у які потрібно ввести нижню і верхню межі інтегрування, підінтегральну функцію та змінну інтегрування.



Приклад.

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^3}dx \to \frac{1}{2\cdot a^2} \qquad\qquad \int \ln(x)dx \to x\cdot\ln(x)-x$$

2.4. Символьні обчислення в MathCad

Команди, що стосуються роботи символьного процесора системи MathCad, містяться в меню **Symbolics (Символика – символьні розрахунки)** (рис. 2.4).

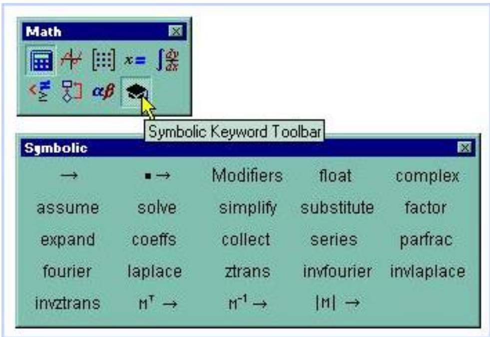


Рис. 2.4. Панель інструментів Symbolic (Символика)

Спрощення символьних виразів у MathCad здійснюється за допомогою таких команд з меню **Symbolic (Символика)** (рис. 2.4):

– Evaluate (Вычислить);

– Simplify (Упростить);

– Expand (Разложить);

– Factor (Разложить на множители);

– Collect (Привести подобные);

– Polynomial Coefficients (Коэффициенты полинома).

Технологія спрощення символьних виразів однакова для всіх команд. Вона складається з виконання таких дій:

1. Введення виразу, який потребує спрощення.

2. Виділення виразу.

3. Виконання відповідної команди з меню **Symbolic (Символика)**.

Символьні обчислення можна здійснювати двома способами:

−за допомогою команд пункту **Symbolic (Символика)** рядки меню;

−за допомогою оператора символьного виводу →, ключових слів символьного процесора і звичайних формул (в довідковій системі MathCad цей спосіб називається символьним обчислення в реальному часі – live symbolic evaluation), які вводяться з палітри інструментів **Символика**. За умовчанням символ → виконує функцію **simplify (Упростить)**, тобто бере вираз з лівого боку і поміщає його спрощену версію з правого.

Перший спосіб більш зручний, коли потрібно швидко отримати будь-якої аналітичний результат для одноразового використання, не зберігаючи сам хід обчислень. Другий спосіб дозволяє записувати вирази в традиційній математичній формі і зберігати символьні обчислення в документах MathCad. Крім того, аналітичні перетворення, що проводяться через меню, стосуються тільки одного, виділеного в даний момент, вирази. Відповідно, на них не впливають формули, що знаходяться в документі MathCad вище цього виділеного виразу (наприклад, оператори присвоювання значень будь-яким змінним). Оператор символьного виводу, навпаки, враховує всі попередній вміст документа і видає результат з його урахуванням.

Для реалізації другого способу застосовуються всі засоби MathCad, придатні для обчислень (наприклад, панелі **Calculator (Калькулятор)**, **Evaluation (Выражения)** і т. п.), та спеціальна математична панель інструментів, яку можна викликати на екран натисканням кнопки **Symbolic Keyword Toolbar (Панель символики)** на панелі **Math (Математика)**. На панелі **Symbolic (Символика)** знаходяться кнопки, відповідні специфічним командам символьних перетворень, наприклад, таким як розкладання виразу на множники та ін.

Приклад:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+3\cdot x}{x}\to 3 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\to\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\to-\infty$$

На відміну від інших, оператори пошуку границь можуть бути обчислені тільки символьно.

2.5. Матричні та векторні операції в MathCad

Технологія створення вектора та матриць. Технологія створення векторів та матриць в MathCad складається з виконання таких дій:

1. Введення імені вектора чи матриці та знака присвоєння.
2. Встановлення розмірів вектора чи матриці.
3. Введення елементів вектора чи матриці в пусті маркери.

Встановлення розмірів вектора чи матриці можна за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+M** чи на панелі **Матрицы и векторы** вибрати команду **Матрица или Вектор** та викликати вікно вставка матриці (рис. 2.5) **Insetrt Matrix (ввести матрицу)**.

У полі Rows задається необхідна кількість рядків матриці чи вектора, а в полі **Columns** – необхідна кількість стовбців.

Після заповнення необхідно натиснути клавішу **Ок**.

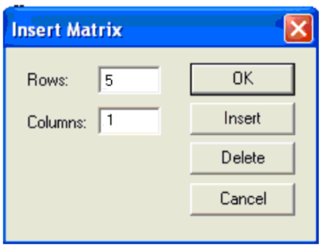


Рис. 2.5. Введення розмірів матриці чи вектора

При введенні вектора в графі **columns (стовпці)** слід проставити 1, а в графі **rows (рядки)** проставити розмір вектора. З'явиться шаблон, показаний на рис. 2.6.

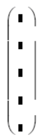


Рис. 2.6. Шаблон вектора

Елементами векторів та матриць можуть бути: дійсні та комплексні числа; функції з числовими значеннями аргументів; сукупність чисел, функцій, арифметичних операторів та їх обчислення.

Операції над матрицями. Над матрицями в MathCad можна виконувати такі дії:

1. додавання до елементів матриці числа: $M+z$.
2. віднімання від елементів матриці числа: $M–z$.
3. добуток елементів матриці на число: $M*z$.
4. ділення елементів матриці на число: M/z.
5. сума матриць: $M1+M2$.
6. віднімання матриць: $M1–M2$.
7. добуток матриць: $M1*M2$.
8. добуток елементів матриць: $\overrightarrow{M1*M2}$.
9. піднесення матриці до степеня: $M1^n$.

MathCad має велику кількість вбудованих функцій та операторів, що дозволяють обчислювати характеристики функцій, виконувати різноманітні її перетворення, утворювати нові матриці, повертати елементи, рядки та стовпці матриць.

Матричні оператори:

1. Зворотна (обернена) матриця: M^{-1}.
2. Обчислення визначника (детермінанта): $|M|$.
3. Транспонування матриці: M^T.
4. Векторизація матриці: $\overrightarrow{M}$.
5. Виділення n-го стовпця матриці: $M^{\langle n \rangle}$.
6. Виділення елемента матриці: $M_{m,\,n}$.

7. Виділення комплесно-спряженої матриці: $|\overline{M}|$.

Функції повернення характеристик матриці:

1. Повернення числа стовпців матриці: *cols(M).*

2. Повернення числа рядків матриці: *rows(M).*

3. Повернення рангу матриці: *rank(M).*

4. Повернення суми діагональних елементів матриці: *tr(M).*

5. Повернення середнього значення масиву елементів: mean*(M).*

6. Повернення медіани масиву елементів: *median(M).*

Матричні функції:

1. Об'єднання двох матриць з однаковим числом рядків в одну: *augment*(*M1,M2*).

2. Об'єднання двох матриць з однаковим числом стовпців в одну: *stack(M1,M2).*

3. Створення одиничної квадратної матриці (*n x n*): *identity (M1, M2).*

4. Повернення матриці дійсних чисел: Re(*M*).

5. Повернення матриці уявних чисел: Im(*M*).

Операції над векторами. Введення вектора відбувається так само, як і введення матриці.

Розглянемо операції над векторами:

1. Транспонування вектора: V^T.

2. Сортування вектора: *sort(V).*

3. Зворотне сортування вектора: *reverse(V).*

4. Векторизація: $\vec{V}$.

5. Норма вектора: $|V|$.

6. Визначення числа елементів вектора: *length(V).*

7. Виділення *n*-го елемента: V_n.

8. Повернення номера останнього елемента вектора *last(V).*

9. Повернення елемента вектора, максимального за значенням: *max(V).*

10. Повернення елемента вектора, мінімального за значенням: *min(V).*

11. Повернення дійсної частини елемента вектора: *Re*(*V*).

12. Повернення уявної частини елемента вектора: *Im*(*V*).

Матричні обчислення. Найпростіші операції з матрицями. Найпростіші операції матричної алгебри реалізовані в MathCad у вигляді операторів. Написання операторів за змістом максимально наближене до їхньої математичної дії. Кожен оператор виражається відповідним символом.

Транспонування. *Транспонуванням* називають операцію, що переводить матрицю розмірності n×m у матрицю розмірності m×n, роблячи стовпці вихідної матриці рядками, а рядки – стовпцями. Введення символу Транспонування (transpose) здійснюється за допомогою панелі інструментів **Matrix (Матрица)** (рис. 2.7).

Рис. 2.7. Панель інструментів Matrix (Матрица)

Приклад:

Транспонування векторів і матриць

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{pmatrix}$$

Додавання і віднімання матриць

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad B:=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\3 & 2 & 2\end{pmatrix} \qquad A-B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\5 & 8 & 10\end{pmatrix}$$

Множення

При множенні слід пам'ятати, що матрицю розмірності m×n припустимо множити тільки на матрицю розмірності n×p (p може бути будь яким). У результаті виходить матриця розмірності m×p.

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix} \qquad B:=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-1 & -3 & -4\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\blacksquare$$

$$C := B^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -19 \\ 4 & -43 \end{pmatrix}$$

Зверніть увагу, що спроба перемножити матриці А і В невідповідного розміру виявилася безрезультатною: після введеного знака рівності знаходиться порожній місцезаповнювач, а сам вираз в редакторі MathCad виділяється червоним кольором.

Визначник квадратної матриці

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 5$$

Зворотна матриця

Обчислення *зворотної матриці* можливе, якщо матриця квадратна, і її визначник не дорівнює нулю. Добуток вихідної матриці на зворотну за визначенням є одиничною матрицею. Для введення оператора пошуку зворотної матриці натисніть кнопку **Inverse (Зворотна матриця)** на панелі інструментів **Matrix (Матрица)**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{pmatrix}$$

Приклад. Нижче (рис. 2.8) представлено три п’ять елементи масиву-вектора: Два з них – чисельні, третій – буквений, четвертий складається з виразів.

При завданні буквених масивів і масивів – виразів необхідно попередньо присвоювати їм чисельні значення (за кожною буквою в комп'ютері має стояти число). Після задання виразів вектора можна, записавши його ім'я і поставивши знак =, отримати його значення. Рисунок ілюструє, що MathCad розрізняє рядкові і заголовні букви.

Над векторами операції додавання-віднімання, транспонування, множення за математичними правилами множення матриць, знак транспонування слід вводити з панелі **Matrix (Матрица)**.

Порядковий номер елемента, який є його адресою, називається індексом.

Нижня межа індексації задається значенням системної змінної ORIGIN, яка може приймати значення 0 або 1.

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad w := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \qquad W := \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \\ 5 - x \\ x^3 - x^5 \\ x \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} \qquad W = \begin{pmatrix} 14 \\ 147 \\ -2 \\ -1.646 \times 10^4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad v + V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} W^T = \begin{pmatrix} 14 & 147 & -2 & -1.646 \times 10^4 & 7 \end{pmatrix} \\ W^T \cdot w = -1.64 \times 10^5 \\ W \cdot w = -1.64 \times 10^5 \end{array}$$

Рис. 2.8. Запис векторів у MathCad

2.6. Графіки матричних і векторних залежностей

У MathCad можлива побудова графіків за даними, записаними у векторній та матричній формі. На рис. 2.9 показано побудова двовимірного графіка за даними векторів *vx* і *vy*, а на рис. 2.10 – побудова тривимірного графіка по заданих в матриці аргументів *S* і вектору функції *Y*.

$$vx := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

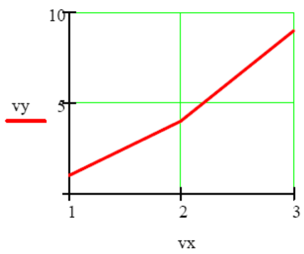


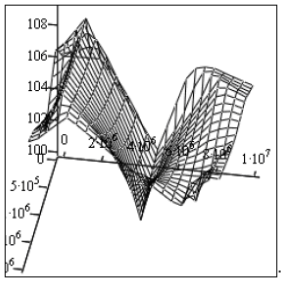
Рис. 2.9. Побудова двовимірного графіка по векторних даними

S :=

	0	1
0	$2.9289 \cdot 10^{5}$	$1.4645 \cdot 10^{6}$
1	$2.9289 \cdot 10^{5}$	$8.5355 \cdot 10^{6}$
2	$1.7071 \cdot 10^{6}$	$1.4645 \cdot 10^{6}$
3	$1.7071 \cdot 10^{6}$	$8.5355 \cdot 10^{6}$
4	0	$5 \cdot 10^{6}$
5	$2 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^{6}$
6	$1 \cdot 10^{6}$	0
7	$1 \cdot 10^{6}$	$1 \cdot 10^{7}$
8	$1 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^{6}$

Y :=

	0
0	110
1	107
2	110
3	104
4	101
5	107
6	105
7	106
8	100



$(S^{\langle 0 \rangle}, S^{\langle 1 \rangle}, Y)$

Рис. 2.10. Тривимірний графік даних, записаних в векторній формі

2.7. Операції над матрицями в аналітичній (символьній) формі

Системи комп'ютерної алгебри забезпечуються спеціальним процесором для виконання аналітичних (символьних) обчислень. Його основою є ядро, що зберігає всю сукупність формул і формульних перетворень, за допомогою яких робляться аналітичні розрахунки. Чим більше цих формул в ядрі, тим більш надійна робота символьного процесора і тим ймовірніше, що поставлена задача буде вирішена, зрозуміло, якщо таке рішення існує в принципі (що буває далеко не завжди).

Операції, що відносяться до роботи символьного процесора, містяться в підміню позиції **Symbolic (Символика)** головного меню.

Щоб символьні операції виконувалися, процесору необхідно вказати, над яким виразом ці операції повинні виконуватись, тобто треба виділити вираз. Для ряду операцій треба не тільки указати вираз, до якого вони належать, а й намітить змінну, щодо якої виконується та чи інша символьна операція.

Сам вираз в такому випадку не виділяється, адже і так ясно, що якщо маркер введення виділяє змінну будь-якого виразу, то це вираження вже відмічено наявністю в ньому виділяємої змінної.

Символьні операції розбиті на п'ять розділів. Це операції з виразами, операції зі змінними, операції з матрицями, операції перетворення, стиль еволюції. Першими йдуть найбільш часто використовувані операції. Вони можуть виконуватися з виразами, що містять комплексні числа чи мають розв'язання в комплексному вигляді.

Символьний процесор системи MathCad забезпечує проведення в символьному вигляді трьох найбільш поширених матричних операцій транспонування і перетворення матриць, а також обчислення їх детермінанта.

При символьних обчисленнях, перш за все, слід викликати панель символьних обчислень натисканням кнопки  на математичній панелі. Після цього з'явиться панель символьних обчислень, показана на рис. 2.11.

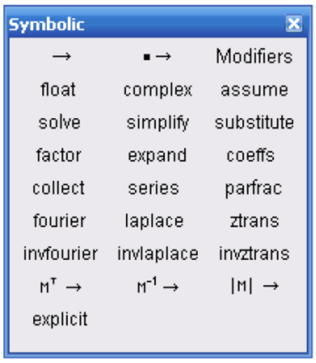


Рис. 2.11. Панель символьних обчислень

Для символьних операцій над матрицями нам знадобиться тільки передостанній рядок цього вікна, за допомогою кнопок якої і проводяться транспонування, перетворення матриці і знаходження її визначення.

3. РОЗВ’ЯЗОК МАТЕМАТИЧНИХ РІВНЯНЬ У MATHCAD

3.1. Розв’язок алгебраїчних рівнянь у MathCad

Аналіз аналітичних та чисельних методів розв’язку алгебраїчних рівнянь показує, що не існує єдиного алгоритму визначення коренів рівняння. Тільки їх сукупність дозволить знайти корені рівнянь і то не завжди.

Комп’ютерні технології розв’язку алгебраїчних рівнянь представляють собою виконання таких дій:

1. Визначення області ізоляції кожного з дійсних коренів рівняння.
2. Вибір вбудованої функції розв’язку рівняння.
3. Розв’язок рівняння.
4. Перевірка правильності одержаного розв’язку.

Система MathCad має декілька вбудованих функцій для пошуку розв’язку рівнянь та систем рівнянь. Серед них є наступні три функції:

1. **Root.** Функція **root** здійснює розв’язок алгебраїчних рівнянь, визначаючи дійсні корені рівняння.

Вона має вигляд: *root(f(x),x)*,

де *f(x)* – рівняння, що розв’язується, тобто *f(x)=0*; *x* – аргумент функції *f(x)*.

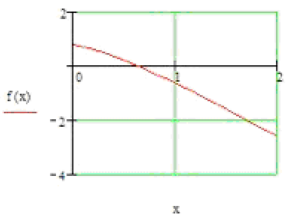
Ця функція подається в одній із таких форм запису:

$x := x0$	$x := x0$	$x := x0$
$root(f(x),x) =$	$z = root(f(x),x)$	$\varphi(x) := f(x)$
	$z =$	$z := root(\varphi(x),x)$
		$z =$

Функція **root** використовується для визначення тільки дійсних коренів, а для визначення комплексних коренів вона не застосовується.

Приклад. Розв’язок рівняння *cos(x)=x+0,2* за допомогою функції **root**

$f(x) := \cos(x) - x - 0.2 \qquad x := 0, 0.1 .. 2$



Графічне рішення рівняння f(x), за графіком визначене початкове наближення x=0.6

$x := 0.6$

$root(f(x), x) = 0.616$

2. **Polyroots.** Визначення коренів полінома здійснюється за допомогою функції **polyroots**, яка має вигляд:

Polyroots(V), V – вектор коефіцієнтів полінома, починаючи з молодшого степеня.

Ця функція знаходить всі дійсні та комплексні корені.

Технологія використання цієї функції така:

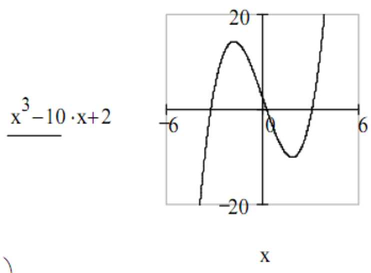
1. Введення вектора коефіцієнтів полінома за допомогою панелі **Matrix (Матрица)**.

2. Введення функції **polyroots**.

3. Одержання результату шляхом натискання на клавішу дорівнює.

Якщо який-небудь член у поліномі відсутній, на відповідній позиції вектора повинен стояти нуль.

Приклад. На рис. 3.1. приведено приклад використання функції **polyroots** для пошуку коренів полінома $x^3 - 10 \cdot x + 2 \cdot x^0$. Графік та проведена перевірка підтверджують наявність та вірність знайдених трьох коренів.



$$v := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad resh := polyroots(v) \qquad resh = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix}$$

$$x := resh \qquad x^3 - 10 \cdot x + 2 = \begin{pmatrix} 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

Рис. 3.1. Пошук коренів полінома з використанням функції polyroots

2. **Find.** Функція **Find** призначена для розв’язку систем рівнянь методом ітерацій. Як частковий випадок функція може розв’язувати систему з одного рівняння, тобто визначати його корені.

У цьому випадку блок розв’язку рівняння поєднує такі процедури: завдання початкового наближення кореня з області його ізоляції; введення слова **Given**, яке вказує на те, що далі йде рівняння, корені якого необхідно визначити; введення рівняння, знак рівності необхідно набрати за допомогою комбінації клавіш **Ctrl+=**; введення функції *Find(x)*, де *x* – шукана змінна; одержання відповіді шляхом натиснення на клавішу =.

Приклад. Необхідно розв’язати рівняння $3^x - 8 \cdot x + 1$, якщо відомо, що рівняння має два корені, область ізоляції яких має значення: $0 < x_1 < 1$, $2 < x_2 < 3$.

Розв’язання рівняння:

Розв'язок рівняння для x1	**Розв'язок рівняння для x2**
$x := 0.5$	$x := 3$
Given	Given
$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$	$3^x - 8 \cdot x + 1 = 0$
find(x) = 0.299	Find(x) = 2.782

Розв’язання рівнянь у символьному вигляді. Складається з таких операцій:

1. Введення рівняння *f(x)=0*, при цьому =0 можна опустити.

2. Виділення шуканої невідомої подвійним клацанням мишки.

3. Звертання до пункту головного меню **Symbolic (Символика)→Переменные→Разрешить**.

4. Одержання відповіді.

При розв’язку рівнянь аналітичним методом MathCad видає не повну інформацію про всі корені рівняння.

Отже необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Перевірка правильності одержаних результатів здійснюється таким чином:

1. Підстановка кореня в рівняння та обчислення значень рівняння, які повинні дорівнювати нулю при всіх значеннях кореня.

2. Обчислення коренів декількома методами.

3.2. Розв’язок систем рівнянь у MathCad

У системі MathCad системи рівнянь розв’язуються за допомогою функцій: **lsolve**; **find**; **minerr**.

Функція **lsolve** дозволяє розв’язувати системи алгебраїчних рівнянь матричним методом. Функція **lsolve** має вигляд: *lsolve(M,V),* де *M* – матриця коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; *V* – вектор правих частин системи рівнянь.

Технологія розв’язку системи рівнянь така: позначення матриці коефіцієнтів системи лінійних рівнянь; утворення вектора правих частин системи рівнянь; введення функції **lsolve**; одержання розв’язку шляхом натиснення на клавішу **Дорівнює**.

Розв’язок матричним методом можна одержати, не використовуючи функцію **lsolve**. Для цього досить ввести вираз M^{-1},V.

Розв’язок системи рівнянь завдяки функції **lsolve** та за допомогою матричного представлення можна одержати, використовуючи символьні обчислення. Для цього служить знак →, що утворюється натисканням комбінації клавіш **Ctrl+.**. Розв’язок одержуємо при натисканні клавіші **Enter**.

Приклад. Вирішити систему лінійних рівнянь в середовищі MathCad з використанням функції *lsolve(M,v),* де вектор рішення *x* такий, що *Mx=v*.

Нехай задана наступна система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 1; \\ x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 2; \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 4. \end{cases}$$

Для розв’язання рівняння в даному середовищі необхідно представити його в матричній формі (матриця лівої частини системи та матриця вільних членів):

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Пошук рішення системи:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$x := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Перевірка знайденого рішення:

$$A \cdot x - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Відповідь:

$x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $x_3 = -1$.

Функція **Find** дозволяє розв’язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь методом ітерацій. Вона має вигляд: *Find(x,y,z,….)*, де *x,y,z* – шукані невідомі.

Технологія розв’язку систем рівнянь є такою: завдання початкових наближень для всіх невідомих: *x:= x0, y:= y0 , z:= z0*, ….; введення слова **Given**, яке вказує на те, що далі буде система рівнянь; введення системи рівнянь; введення функції *Find(x,y,z,….)*; одержання результату.

Приклад. Рішення системи рівнянь за допомогою функції **Find**:

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$ - початкове наближення

Given

$100x1 + 6x2 - 2x3 = 100$

$6x1 + 200x2 - 10x3 = 600$ - для друку символа = використовується комбінація клавіш [Ctrl] =

$x1 + 2x2 + 100x3 = 500$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$$

Функції **lsolve** та **Find** дозволяють одержати розв’язок системи рівнянь символьним методом.

Функція **Minerr** має таку саму технологію застосування для розв’язку, як і функція **Find** і має таку форму запису: *Minerr(x,y,z,….)*, де *x,y,z* – шукані невідомі.

Функція **Minerr** так само як і функція **Find** розв’язує лінійні та нелінійні алгебраїчні рівняння. Відмінність полягає в тому, що функція може видати розв’язок, не досягнувши потрібної точності ітерацій. Це дозволяє одержати наближений розв’язок у випадку, коли функція **Find** не видає результату. Але слід пам’ятати, що при використанні функції **Minerr** необхідно перевіряти правильність одержаних результатів.

Приклад. Розв’язати систему рівнянь і знайти значення змінних *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

$A := 1 \quad B := 1 \quad C := 1 \quad D := 1 \quad E := 1$ – призначення довільних початкових значень змінних;

Given – введення ключового слова процедури;

$A + B + D = 0$

$-2.06 \cdot A + C - .3 \cdot B + E - 1.73 \cdot D = 0$

$0.4 \cdot A = 0.72$

$-1.07 \cdot A + .21 \cdot C + 2.16 \cdot E = 0.72$

$2.9 \cdot A - .3 \cdot C + .21 \cdot B - 1.7 \cdot E + 2.16 \cdot D = 0$

– введення рівнянь (символ “=” – з блока логічних операцій);

$Z := \mathrm{Minerr}(A, B, C, D, E)$

$$Z = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.378 \\ -0.1 \\ -1.422 \\ 1.235 \end{pmatrix}$$

– розв’язання за допомогою функції **Minerr**.

3.3. Інтегрування диференційних рівнянь

Система MathCad дозволяє розв’язувати диференційні рівняння двома різними методами: за допомогою вбудованих функцій; за допомогою чисельних методів.

При цьому розв’язком є результат у табличній чи графічній формах.

Функція **Odesolve** разом із блоком **Given** дозволяє інтегрувати окреме диференціальне рівняння в графічній формі.

Формат функції:

odesolve(x,b[,steps]) ,

де *x* – ім’я змінної; *b* – кінцеве значення аргументу; *steps* – кількість фіксованих кроків інтегрування. Дозволяється **steps** не визначати, що автоматично встановлює режим інтегрування з адаптивним кроком.

Блок **Given** розміщується перед зверненням до **Odesolve** і складається з рівняння та початкових умов.

Приклад:

Given

$y''(t) + t^2 \cdot y'(t) + t \cdot y(t) = \sin(t)$ – диференціальне рівняння;

$y(0) = -8 \qquad y'(0) = 3$ – початкові умови;

$y := \mathrm{odesolve}(t, 6)$ – функція з кінцевими умовами та адаптивним кроком.

У прикладі використано символ диференціювання як штрих у верхньому регістрі. Для введення символу застосовують клавішу з позначеннями:

.

Процес розрахунків зручно аналізувати за отриманим графіком (рис. 3.2).

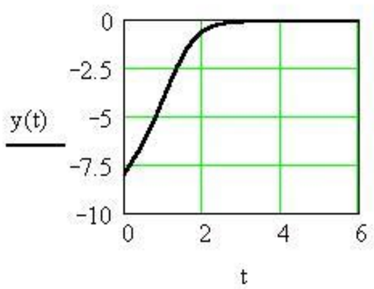


Рис. 3.2. Графік розрахунків

Залежність змінної від аргументу визначається процесом, що має назву інтегрування.

4. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ У MATHCAD

4.1. Застосування графіків

Візуалізація результатів дає можливість виявити їх особливості та стимулювати проведення наступного більш детального аналізу.

Відомі три способи представлення функцій: у вигляді формули, таблиці та графіки.

У практичних задачах часто виникає необхідність візуалізації функцій у таких ситуаціях:

1. Загальний огляд точок графічної залежності. MathCad має властивість відображати графіки функцій за допомогою технології швидкої побудови, що важливе для експрес-аналізу результатів.

2. Дослідження графіка: точки перетину функції з віссю абсцис дають інформацію про корені відповідного рівняння. Допоміжні засоби трасування дозволяють без розрахунків зчитувати числові результати. Аналіз вхідних табличних даних: невелика кількість опорних точок графіка при цьому з'єднуються послідовно лінійними відрізками.

3. Знаходження за табличними даними необхідної формули. Використання формули в практиці обробки даних характеризується відновленням великої кількості проміжних точок з побудовою відповідного апроксимуючого графіка.

4. Оцінка ступені наближення та встановлення діапазону припустимої заміни однієї складно обчислювальної функції на іншу більш просту.

5. З графіка при проведенні додаткових міркувань можна одержати якісну та кількісну оцінку похибки обчислень за відомими похибками аргументів.

Графічні області поділяються на три основних типи – двовимірні графіки, тривимірні графіки та імпортовані графічні образи. Двовимірні і тривимірні графіки будуються самим MathCad на основі оброблених даних.

В MathCad вбудовано декілька різних типів графіків, які можна розбити на дві великі групи:

1. Двовимірні графіки:

− X-Y Plot (X-Y графік);

− Polar Plot (Полярний графік).

2. Тривимірні графіки:

− Surface Plot (Графік тривимірної поверхні);

− 3D Scatter Plot (Тривимірна множина точок);

− 3D Bar Plot (Тривимірна гістограма);

− Contour Plot (Графік ліній рівня);

− Vector Field Plot (Векторне поле).

Поділ графіків на типи є умовним, так як керуючи установками багатьох параметрів, можна створювати комбінації типів графіків, а також нові типи графіків.

4.2. Склад панелі графіків

Завдання графіка у вибраній позиції документа починається з вибору за допомогою меню **Insert (Вставка)→Graph (График)** чи за допомогою панелі інструментів **Графики** (рис. 4.1).

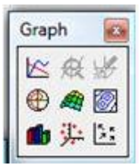
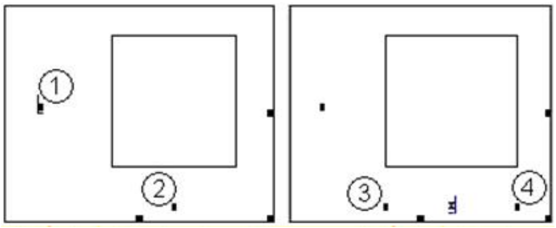


Рис. 4.1. Панель Graph (График)

Двомірна графіка в MathCad. *Побудова графіка в Декартовій системі.* Для побудови будь-якого графіка необхідно спочатку визначити на листі всі дані, необхідні для побудови, потім вставити на лист відповідний графічний регіон і пов'язати його з даними, що відображаються. Для вставки графічного регіону можна використовувати відповідні кнопки панелі **Graph**, вибрати необхідний пункт у верхньому меню **Insert/Graph** (або **Вставка/График**) або використовувати відповідні комбінації клавіш. Зв'язок з даними, що відображаються, проводиться шляхом вказування цих даних в позиціях введення графічного регіону.

Для регіонів лінійних графіків (рис. 4.2) заповнюються дві основні позиції вводу – зліва і знизу від графіка.



а) б)

Рис. 4.2. Вигляд регіону для лінійного графіка до (а) і після (б) заповнення однієї з основних позицій вводу

У нижній позиції 2 вказується вираз, що визначає значення абсцис графіка. Виразом може бути ім’я послідовності, вектора або звичайної змінної. Може бути декілька виразів через кому. У разі необхідності можна вказати в додаткових позиціях 3 і 4 мінімальне і максимальне значення.

У позиції 1 вказується вираз, що визначає значення ординат графіка. Можна перерахувати декілька виразів через кому – в цьому випадку буде побудовано декілька графіків в одних координатах. Вирази звичайно є функціями від аргумента, вказаного у позиції 2. Проте, можуть бути побудовані і графіки від двох функцій заданих параметрично, в цьому випадку в позиціях 1 і 2 указуються імена цих функцій (рис. 4.3).

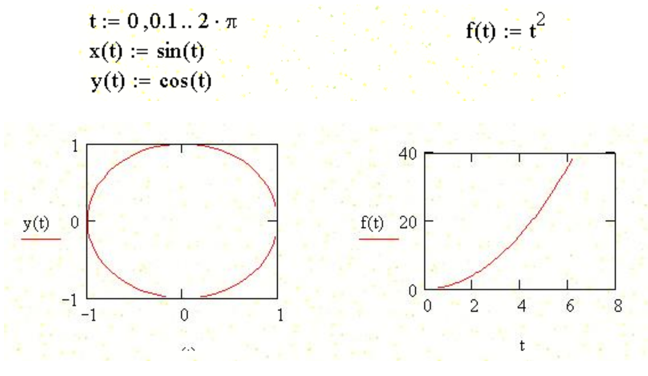


Рис. 4.3. Фрагмент листа MathCad з лінійними графіками двох функцій (параметричної ($x(t)$; $y(t)$) і звичайної $f(t)$)

Приклад. У виділеному нижньому затушованому квадратику заготовки графіка необхідно помістити значення аргумента (наприклад, *x*), а у лівому затушованому квадратику – функцію, яка повинна бути зображена на рис. 4.4.

Функція може бути задана аналітичним виразом, наприклад:

$$\sin(x) + 2\cdot\cos(x)$$

або в такому вигляді: *f(x)* чи *df(x)/dx*.

При цьому загальний вигляд функції конкретизується перед графіком, наприклад: $f(\mathrm{x}) := \sin(x) + 2\cdot\cos(x)$

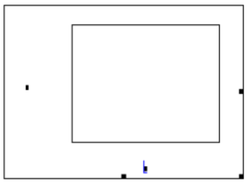


Рис. 4.4. Заготовка графіка

Щоб створити, наприклад, двовимірний графік в декартовій системі координат, необхідно:

1. Помістити курсор вводу в те місце документа, куди потрібно вставити графік.

2. Якщо на екрані немає панелі **Graph (График)**, то викличте її натисканням кнопки із зображенням графіків на панелі **Math (Математика)**.

3. Натисніть на панелі **Graph (График)** кнопку **X-Y Plot** для створення графіка в декартовій системі координат, або натисніть іншу кнопку для створення іншого графіка.

4. В результаті цих дій появиться порожня область графіка з одним або декількома місцезаповнювачами. Введіть в місцезаповнювачі імена змінних або функцій, які повинні бути відображені на графіку. В нашому випадку це два місцезаповнювачі – один на осі *x*, другий – на осі *y*. Якщо імена даних введені правильно, то графік появиться на екрані.

Створений графік можна змінювати, змінюючи дані, форматуючи його зовнішній вигляд, добавляючи додаткові елементи оформлення. Щоб видалити графік, потрібно клацнути в його межах і вибрати в меню **Edit (Правка)** пункт **Cut (Вырезать)** або **Delete (Удалить)**.

Побудова декількох рядів даних. На одному графіку можна побудувати до 16 різних залежностей.

Щоб побудувати на графіку ще одну криву, необхідно виконати такі дії:

1. Помістити лінії вводу таким чином, щоб вони повністю захоплювали вираз, який стоїть в надпису координатної осі *y*.

2. Натиснути клавішу <,>.

3. В результаті цих дій появиться місцезаповнювач, в який потрібно ввести вираз для другої кривої.

4. Клацніть в будь-якому місці поза цим виразом (на графіку або за його межами). Після цього друга крива буде відображена на графіку.

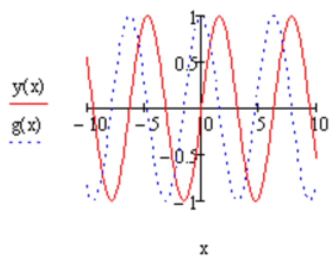
Щоб в одній системі координат побудувати графіки функцій різних аргументів, потрібно ввести імена цих аргументів через кому біля осі х.

Приклад. Задаємо ранжовану змінну та функції:

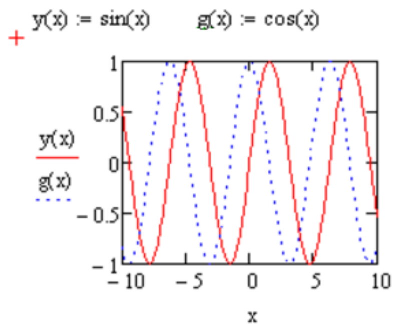
$x := -10, (-10 + 0.2) .. 10$

$y(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \cos(x)$

Побудуємо графіки функцій та :



Форматування графіків. Форматування графіків включає в себе управління їх зовнішнім виглядом, діапазоном, шкалою та відображенням деяких значень на осях за допомогою маркерів (маркерами на координатних осях відмічаються мітки деяких значень). Коли графік будується вперше і користувач не задав діапазон даних для аргументу функції, MathCad автоматично задає діапазон для обох координатних осей.



Щоб змінити цей діапазон, необхідно:

1. Перейти до редагування графіка, клацнувши мишкою в його межах.
2. Графік буде виділений, а поблизу кожної із осей появляться два поля з числами, які означають межі діапазону. Клацніть мишею в області одного із полів, щоб редагувати відповідні межі осі.
3. Користуючись клавішами управління курсором і клавішами **Back Space** та **Del**, вилучіть вміст поля.
4. Введіть нове значення діапазону.
5. Клацніть за межами поля і графік буде автоматично перебудований в нових межах.

Зміна зовнішнього вигляду шкали, нанесеної на координатну вісь, виконується за допомогою вікна діалогу **Formatting Currently Selected X-Y Plot (Форматирование выбранного графика)**, в якому необхідно перейти на вкладку **X-Y Axes (Оси X-У)** (рис. 4.5). Викликати вікно діалогу можна подвійним клацанням миші в області графіка або виконанням команди **Format→Graph→X-Y Plot (Формат→График→X-У График)**, або вибором в контекстному меню команди **Format (Формат)**. За допомогою прапорців та перемикачів можна легко змінити зовнішній вигляд кожної із осей. Назвемо доступні опції та пояснимо їх дію:

1. **Log Scale** – налаштувати логарифмічну шкалу.
2. **Grid lines (Линии сетки)** – показати лінії сітки;
3. **Numbered (Нумерация)** – показати нумерацію шкали;
4. **Autoscale (Автоматический масштаб)** – вибор діапазону осі виконується автоматично процесором Mathcad;

5. **Show Markers (Показать маркеры)** – виділення значень на осях;

6. **Auto Grid (Автоматическая шкала)** – розбиття шкали виконується автоматично процесором MathCad;

7. **Equal Scales (Одинаковый масштаб)** – осі *X* та *У* примусово малюються в однаковому масштабі;

8. **Axes Style (Вид оси)** – можна вибрати один із трьох видів системи координат: **Boxed (Прямоугольник)** – графік будується в прямокутній області; **Crossed (Пересечение)** – координатні осі відображаються у вигляді двох прямих, що перетинаються; **None (Нет)** – координатні осі не відображаються на графіку.

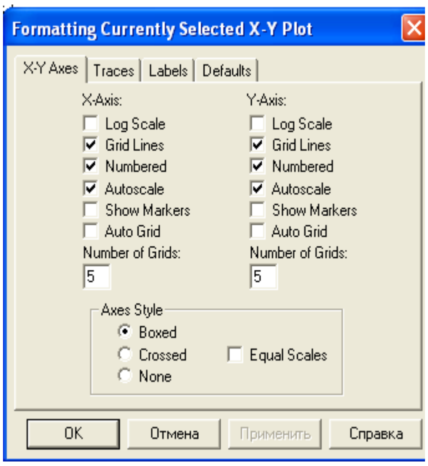


Рис. 4.5. Вікно форматування сітки

Вкладка **Traces (Следы)** (рис. 4.6) призначена для налаштування вигляду графіка. Поле **Legend Label (Имя в легенде)** призначене для вибору графіка. Поле **Symbol (Символ)** служить для відображення символів графіка. Поле **Line (Линия)** служить для вибору символів відображення ліній графіка (суцільна – solid, точкова – dot, штрихова – dash, штрих-пунктирна dado. Поле **Color (Цвет)** призначене для вибору кольору відображення графіка лінії. Поле **Type (Тип)** служить для вибору типу лінії (суцільна, з областями, штрихова). Поле **Weight (Вес)** служить для вибору товщини відображення графіка.

Рис. 4.6. Вікно форматування графіка

Вкладка **Labels** (рис. 4.7) призначена для завдання заголовку графіка та його осей.

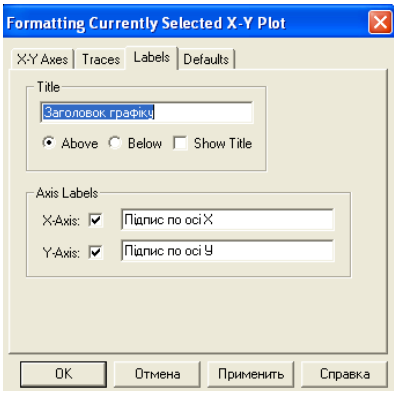


Рис. 4.7. Вікно налаштування підписів графіка

Побудова плоского графіка в полярній системі координат. Система MathCad дозволяє будувати графіки в полярній системі координат. Для цього служить кнопка **Polar Plot (Полярный график)** з панелі **Graph (График)**.

При ініціалізації цієї кнопки піктограми на екрані виводиться заготовка графіка у вигляді прямокутника з колом, на якому знаходяться два затушованих прямокутники: один – внизу, другий – зліва від кола.

Приклад побудови графіка функції в полярній системі ко- ординат зображений на рис. 4.8.

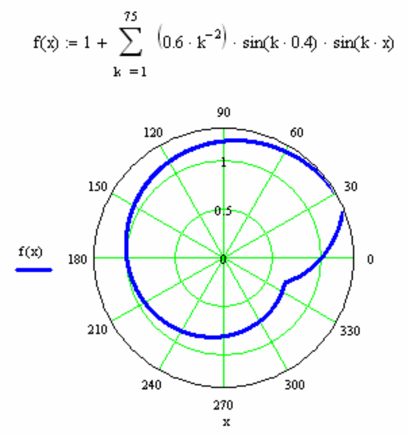


Рис. 4.8. Побудова графіка в полярній системі координат

Операції над графіками. Ділянки плоских графіків можуть бути збільшені до потрібного розміру. Для цього служить кнопка **X-Y Zoom** (**Масштаб)** з панелі інструментів **Graph (График)**. Ініціалізація цієї кнопки здійснюється після виділення на графіку деякої ділянки (виділена ділянка показана пунктиром, рис. 4.9).

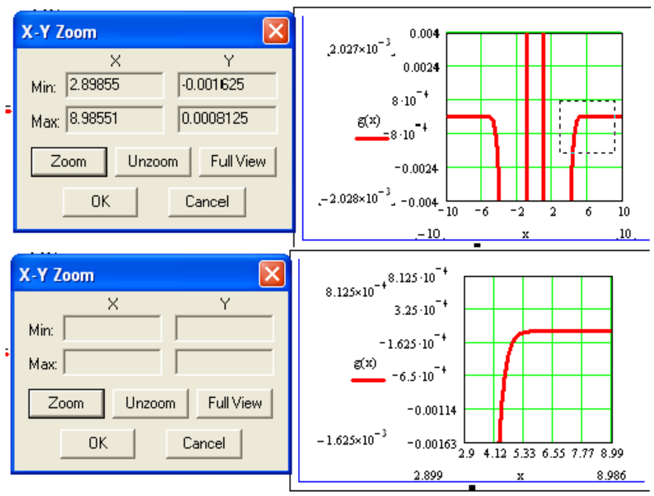


Рис. 4.9. Операція масштабування графіків

Для визначення координат точок графіка (трасування) служить кнопка **X-Y Trace (Слежение)** з панелі інструментів **Graph (График)**.

Визначення координат називається трасуванням (визначенням точок) кривої. При ініціалізації кнопки **X-Y Trace (Слежение)** на екрані виводиться меню, зображене на рис. 4.10.

Трасування графіка здійснюється двома лініями, координати перетину яких показуються у вікні **X-Y Trace (Слежение)**. Ці координати можна скопіювати **Copy X**, **Copy Y** в буфер обміну, а потім перенести в потрібне місце MathCad-документа.

Шляхом трасування можна визначити максимум (мінімум) кривої.

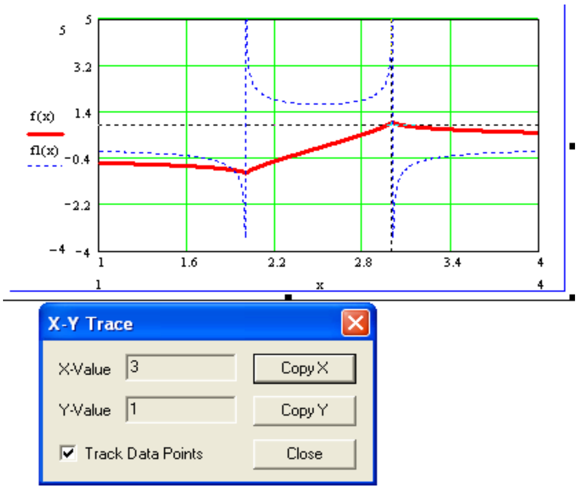


Рис. 4.10. Трасування кривої графіка

Тривимірна графіка в MathCad. ***Загальний вид панелі Математика.*** Для побудови поверхні в панелі графіків є кнопка **Surface Plot (Поверхностный график)** з панелі **Graph (График)**.

При ініціалізації цієї кнопки на екран виводиться заготовка об'ємного графіка поверхні, що має вигляд прямокутника, в лівому нижньому куті якого знаходиться чорний квадратик. На його місце треба помістити ім'я матриці чи вектор, які потім будуть зображені у вигляді об'ємного графіка.

Для побудови графіка функції двох змінних перед його заготовкою задається додаткова інформація:

1. визначається функція, наприклад:

$F(x, y) := 1 + (\cos(x) - 10 \cdot \sin(y)^2) \cdot \exp(-[x-1)^2+5 \cdot y^2] /2$

2. вводиться індексація вузлів сітки: $i := 0..10 \quad j := 0..7$

3. формуються вектори значень аргументів, що відповідають вузлам сітки: $x_i := i \cdot 0.2-1 \qquad y_j := j \cdot 0{,}1$

4. обчислюється матриця значень функції, аргументи яких відповідають вузлам сітки: $U_{i,j} := F\ (x_i, y_i)$

Ця інформація розміщується перед полем графіка. Побудований відповідно до заданої матриці графік функції двох змінних має вигляд просторової сітки (рис. 4.11).

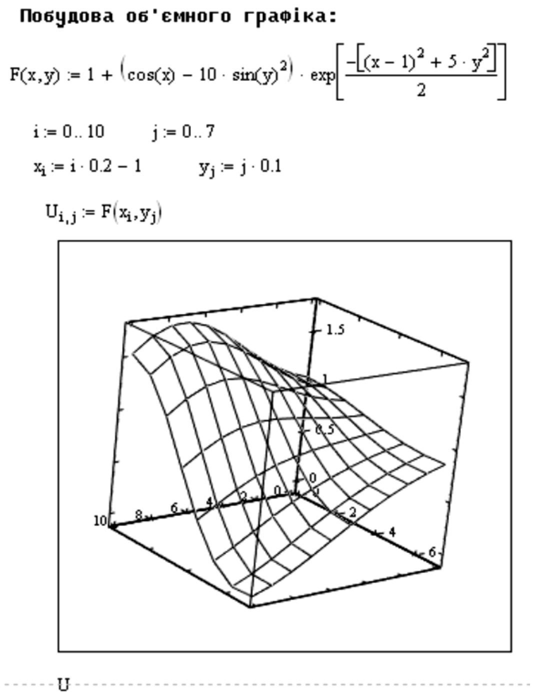


Рис. 4.11. Об’ємний графік

Графік можна редагувати за допомогою подвійного клацання мишкою по графіку, після чого з’явиться вікно, зображене на рис. 4.12.

Тут як і в плоскому графіку можна налаштовувати вигляд координатної сітки, вид графіка, його форму та кольорове оформлення.

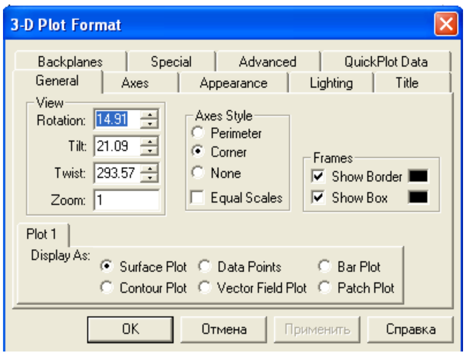


Рис. 4.12. Вікно форматування графіка

Точкова діаграма. Графічне зображення матриці (рис. 4.13) можна подати у вигляді точкової діаграми. Координати точок відповідають значенням матриці у вузлах сітки. За допомогою команди **3D Scatter Plot**

(Трехмерный точечный график) на панелі інструментів **Graph (График)**.

Засоби математичного пакету дозволяють в широкому діапазоні змінювати вигляд і формат графіка – здійснювати нахил графіка, обертання його на необхідний кут, нумерувати осі, задавати вигляд сітки та інше.

На полі графіка вказуються необхідні параметри координат, зображуються координатні осі, координатні площини та граничні лінії, змінюються координати вузлів сітки та відповідна їм кількість ліній на графіку поверхні.

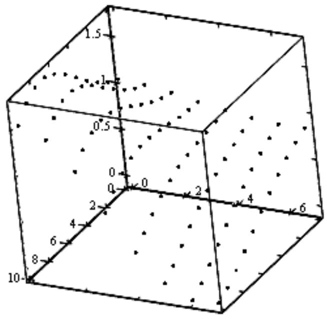


Рис. 4.13. Об’ємна точкова діаграма

Стовпчаста діаграма. Елементи вектора чи матриці також можна зобразити у вигляді стовпчастої діаграми. Для цього на панелі інструментів **Graph (График)** є кнопка **3D Bar Plot (3D Диаграммы).**

Висота стовпчиків діаграми відповідає значенню вектора чи матриці у вузлі сітки. Зображення матриці чи вектора у вигляді стовпчастої діаграми подається в аксонометрії (рис. 4.14). Для побудови графіка у вигляді стовпчастої діаграми задається раніше вказана додаткова інформація про сітку, на якій визначена функція двох змінних або значення матриці.

Стовпчаста діаграма дає зручну візуальну інтерпретацію функції двох змінних або елементів вектора чи матриці.

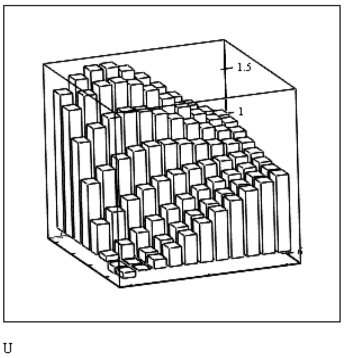


Рис. 4.14 Стовпчаста діаграма

Графік з контурами. Засоби математичного пакета MathCad дають можливість дослідження багатьох властивостей функції кількох змінних, заданих аналітичним виразом. Можуть бути виконані перерізи поверхонь паралельними площинами. Для цього служить різновид об’ємного графіка у вигляді ізоліній (ліній рівного значення функції). Побудова цього графіка здійснюється за допомогою команди меню тривимірного графіка або за допомогою кнопки **Contour Plot (Контурный график)** з панелі інструментів **Graph (График)**.

Графік ізоліній (рис. 4.15) дозволяє виконати аналіз функції двох змінних, зокрема аналіз на екстремум, наявність нулів, полюсів та інше. Приклад побудови ізоліній наведено на рис. 4.15.

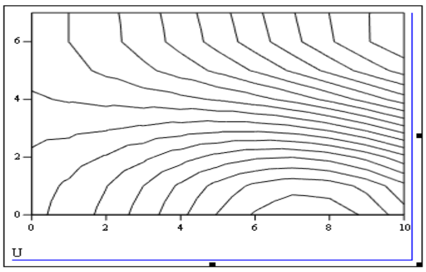


Рис. 4.15. Графік ізоліній

Векторні графіки. Засобами математичних пакетів можна побудувати векторне поле функції двох змінних. Для цього на інструментів панелі **Graph (График)** є кнопка **Vector Field Plot (Векторный график)**.

Векторне поле визначається спеціальною векторною функцією, яка повинна бути задана перед графіком.

Наприклад, розглянемо функцію двох змінних (потенціал):

$$z := 0 \quad \varphi(x,y) := \ln(1+x+y+z)+(x^2+y^2+z^2)^2.$$

Дана функція утворює скалярне поле, яке характеризується вектором-градієнтом. Вектор-градієнт визначається такою векторною функцією:

$$grad(x,y) := \begin{bmatrix} (1+x+y+z)^{-1}+4\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot x \\ (1+x+y+z)^{-1}+4\cdot(x^2+y^2+z^2)\cdot y \end{bmatrix}.$$

Проекції вектора градієнта даного скалярного поля:

$$f1(x,y) := grad(x,y)_0,$$
$$f2(x,y) := grad(x,y)_1.$$

Здійснимо індексацію вузлів сітки та формування векторів значень аргументів:

$$i := 0...20 \qquad j := 0...20$$
$$x_i := 0.05 \cdot i \qquad y_i := 0.05 \cdot j$$

Обчислення матриць-компонент вектора-градієнта:

$$M_{i,j} := f1(x_i, y_j) \quad N_{i,j} := f2(x_i, y_j).$$

Приклад векторного поля зображений на рис. 4.16.

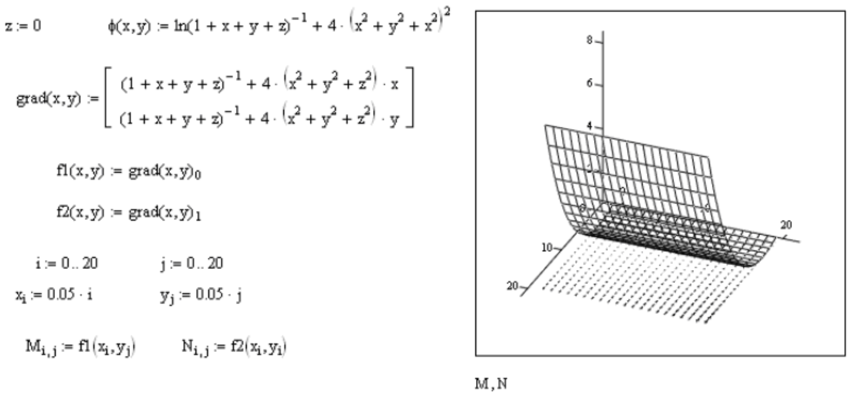


Рис. 4.16. Графік зображення векторного поля

5. ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

5.1. Апроксимація, інтерполяція та екстраполяція

При обробці експериментальних даних виникає задача апроксимації результатів експерименту аналітичною залежністю *y=f(x)*, яку можна використовувати в подальших розрахунках.

Існує три можливості апроксимації даних експерименту:

1. Апроксимуюча функція *f(x)* повинна проходити через всі досліджувані точки. Такий спосіб апроксимації називається інтерполяцією.

2. Вибрати апроксимуючу функцію таким чином, щоб вона згладжувала, усереднювала досліджувальні дані. Такий спосіб апроксимації називається регресією або зглажуванням.

3. Підібрати апроксимуючу функцію, відкидаючи систематичну похибку, так звані завади, що накладаються на експериментальні дані. Такий спосіб називається згладжуванням з фільтрацією даних.

Дуже часто спортивна інформація подається у вигляді набору деяких статистичних даних за певні періоди. Для аналізу цих даних виникає проблема визначити відсутні значення в проміжках між цими періодами або прогнозувати розвиток подій на подальші періоди.

Для цих цілей статистичні данні варто **апроксимувати**, тобто побудувати деяку досить просту функцію, яка в зазначених точках буде приймати значення знайомого статистичного ряду. Тоді можна обчислити значення цієї функції між заданими точками (тобто зробити **інтерполяцію** даних) і за їх границями **(екстраполяція).**

MathCad дозволяє провести апроксимацію даних за допомогою побудови лінійної функції і за допомогою кубічного полінома.

Апроксимація – це інтерполяція, наближена в вузлах, що дозволяє згладити неточності початкових даних, і таким чином, підвищити достовірність одержаної моделі.

Система MathCad має ряд вбудованих функцій, що дозволяють розв’язати задачу апроксимації. Такими функціями є такі функції:

– сукупність функцій **slope** та **intercept**, що дозволяє розв’язати задачі лінійної апроксимації;

– **interp** – поліноміальна апроксимація;

– **linfit** – апроксимація лінійною комбінацією функцій;

– **genfit** – апроксимація нелінійними функціями.

Розглянемо технологію розв’язку задач апроксимації за допомогою перелічених функцій та наведемо приклади.

5.2. Лінійна інтерполяція

Вбудовані функції MathCad дозволяють при інтерполяції проводити через експериментальні точки криві різної степені гладкості.

Лінійна інтерполяція дозволяє розрахувати проміжні значення за лінійною залежністю. Це означає з’єднання заданих точок ряду відрізками прямих. Для такої кусково-лінійної інтерполяції в MathCad призначена функція *linterpr()*. Формат функції:

Linterpr(vx,vy,x),

де *vx, vy* – вектори вихідних даних, причому дані мають бути упорядковані за зростанням, *x* – аргумент, для якого повертається значення *y*.

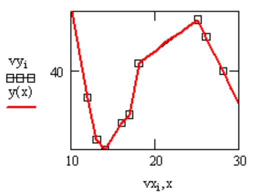
Приклад. Отримані експериментальні дані 2-х показників (x, y):

Показник *x*	12	13	14	16	17	18	25	26	28
Показник *y*	37	32	31	34	35	41	45	44	40

Потрібно провести лінійну інтерполяцію наявної залежності для того, щоб обчислити значення для *x*=15, *x*=20, *x*=30.

Розв’язання.

$$vx := \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 25 \\ 26 \\ 28 \end{pmatrix} \quad vy := \begin{pmatrix} 37 \\ 32 \\ 31 \\ 34 \\ 35 \\ 41 \\ 46 \\ 44 \\ 40 \end{pmatrix} \quad y(x) := \mathrm{linterp}(vx, vy, x) \quad x := 10..30 \quad i := 0..8$$



Тоді для побудованої функціональної залежності *y(x)* (кусково-лінійної) можна обчислити значення: $y(15) = 32{,}5$; $y(20) = 42{,}429$.

Для цілей екстраполяції функції функція *linterpr()* практично не призначена, тому значення в точці x=30 обчислювати не будемо.

5.3. Сплайн-інтерполяція

Висока точність інтерполяції може бути досягнута шляхом інтерполяції функції $y=f(x)$ множиною поліномів невисокого порядку. Такі поліноми називаються сплайнами. Сплайни можуть бути другого, третього та четвертого порядку. В системі MathCad реалізована інтерполяція кубічними сплайнами за допомогою функції:

$\mathrm{int}\,erp(V_S, V_X, V_Y, x)$, де V_X, V_Y – вектори значення аргумента і функції; $V_S := cspline(V_X, V_Y)$, де x – значення аргумента.

Функція **interp** може бути подана в такому вигляді:

$$\mathrm{int}\ erp(cspline(V_X, V_Y), V_X, V_Y, x)$$

Приклад. Розв’язати задачу сплайн-інтерполяції та порівняти результати інтерполяції, одержані класичним методом, що потребують розв’язку системи рівнянь, та методом-сплайн інтерполяції.

Розв’язання:

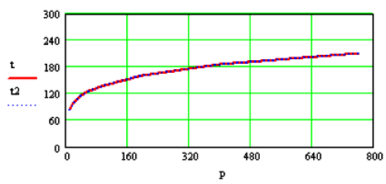
Вхідні данні:

$$P := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \\ 60 \\ 100 \\ 200 \\ 400 \\ 760 \end{pmatrix} \quad t := \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix} \quad Vs := cspline(P, t)$$

Вибір функції сплайн-інтерполяції:

$$t1 := P \qquad t2 := interp(Vs, P, t, t1) \qquad t2 = \begin{pmatrix} 84.6 \\ 99.3 \\ 115.4 \\ 125.8 \\ 139.9 \\ 161.2 \\ 185.8 \\ 210.6 \end{pmatrix}$$

Побудова графіку вхідної функції (суцільною червоною лінією) та інтепольованої (крапками):



5.4. Лінійна апроксимація

Функції **slope** та **intercept** розв’язують задачі лінійної апроксимації, визначають коефіцієнти *a* та *b* функції $y = a + b \cdot x$, що подана у вигляді таблиці.

Розв’язання має такий вигляд:

$b := slope(Vx, Vy)$,
$a := intercept(Vx, Vy)$,

де Vx, Vy – вектори аргумента та функції відповідно.

Приклад. У результаті дослідження були одержані наступні дані:

X	1	2	3	4	5	6
Y	0,29	0,44	0,55	0,62	0,67	0,7

Необхідно розв’язати задачу лінійної апроксимації, використовуючи функції MathCad **slope** та **intercept**.

Вибір виду функції інтерполяції.

Переконаємося, що функція інтерполяції є лінійною. Скористаємося графоаналітичним методом. На рис. 5.1 наведена залежність *y=f(x)*, що побудована за даними таблиці наведеної вище.

З графіка видно, що функція *y=f(x)* нелінійна і задача сформульована так, що необхідні додаткові дії, щоб привести її до лінійного вигляду.

Порівняємо одержаний графік з графіками типових функцій і побачимо, що функцією інтерполяції може бути дробово-лінійна $y = x/(a + b \cdot x)$ або степенева $y = a \cdot x^d$. Вони обидві можуть бути лінеаризовані та представлені у вигляді таких лінійних функцій:

$Y_1 = a + b\ \ x$; $\quad Y_2 = c + d \cdot X$, де $Y_1 = x/y$; $Y_2 = \ln y$; $X = \ln x$; $c = \ln a$

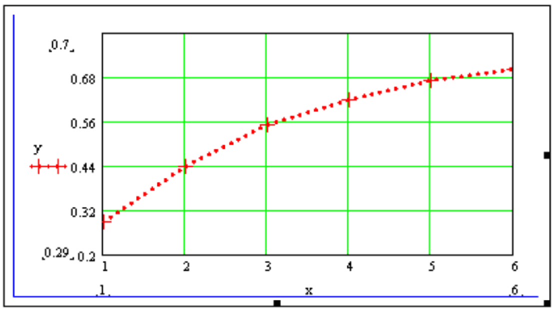


Рис. 5.1. Графік функції для прикладу

Значення лінеаризованих аргументів і функцій наведені в таблиці нижче. Таблиця лінеаризованих дробово-лінійної та степеневої функцій:

x	1	2	3	4	5	6
y	0.29	0.44	0.55	0.62	0.67	0.7
X	0	0.69	1.1	1.39	1.61	1.79
Y1	3.45	4.55	5.45	6.45	7.46	8.57
Y2	-1.24	-0.82	-0.6	-0.48	-0.4	-0.36

Тепер можна розв'язати задачу лінійної апроксимації за допомогою функцій **slope** та **intercept**.

Випадок 1. Дробово-лінійна функція

$$y = \frac{x}{a + b \cdot x}.$$

У цьому випадку лінеаризована функція $Y_1 = a + b \cdot x$. має вигляд Тоді розв'язок буде мати вигляд, що зображений на рис. 5.2.

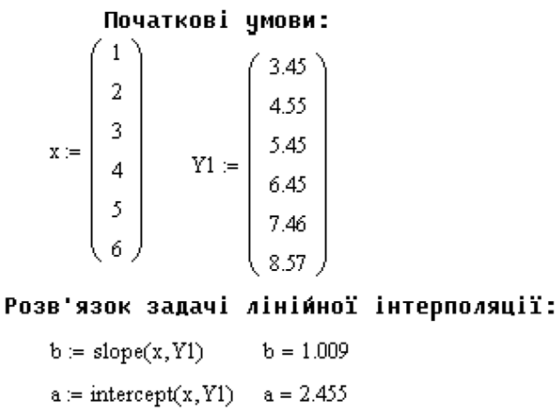


Рис. 5.2. Розв'язок для дробово-лінійної функції інтерполяції

Таким чином, коефіцієнтами дробово-лінійної функції будуть: *a*=2,45; *b*=1,009, а функція інтерполяції буде мати вигляд:

$$y = \frac{x}{2{,}5 + x}$$

Випадок 2. Степенева функція $y = a \cdot x^d$

У цьому випадку лінеаризована функція має вигляд: $Y_2 = c + d \cdot X$.

Тоді розв'язок буде мати вигляд, що поданий на рис. 5.3. Але так як $c = \ln a$, то $a = e^c = e^{-1.197} = 0.302$.

Таким чином, коефіцієнтами степеневої функції $y = a \cdot \mathrm{x}^{\mathrm{d}}$ будуть *a*=0,3; *d*=0,5, а функція буде мати вигляд $y = 0{,}3 \cdot \mathrm{x}^{0{,}5}$ чи $y = 0{,}3 \cdot \sqrt{x}$.

Початкові умови:

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.693 \\ 1.099 \\ 1.386 \\ 1.609 \\ 1.792 \end{pmatrix} \qquad Y2 := \begin{pmatrix} -1.24 \\ -0.82 \\ -0.6 \\ -0.48 \\ -0.4 \\ -0.36 \end{pmatrix}$$

Розв'язок задачі лінійної інтерполяції:

$c := \mathrm{intercept}(x, Y2) \qquad c = -1.197$

$d := \mathrm{slope}(x, Y2) \qquad d = 0.499$

Рис. 5.3. Розв’язок для степеневої функції

Результати табулювання функцій:

x	1	2	3	4	5	6
y	0.29	0.44	0.55	0.62	0.67	0.7
φ1	0.286	0.444	0.545	0.615	0.667	0.706
φ 2	0.3	0.424	0.52	0.6	0.671	0.735

У таблиці введені такі позначення:

− *x, y* – вхідні значення аргументу та функції;

− *φ1* – значення дробово-лінійної апроксимації;

− *φ2* – значення степеневої функції апроксимації.

Таким чином, видно, що найбільш кращою є дробово-лінійна функція. Похибки обох функцій малі, тому немає потреби їх розраховувати.

5.5. Поліноміальна апроксимація

Апроксимація поліномами в MathCad здійснюється за допомогою функції **interp**, яка має вигляд:

interp(Vs, Vx, Vy, x),

де *Vx, Vy* – вектори аргумента *x* та функції *y(x)*; *Vs* – функція, яка обчислюється функціями **loess** чи **regress**; *x* – аргумент обчислюваної функції інтерполяції.

Функція **loess** має вигляд:

loess(Vx, Vy, span).

де span – параметр, що вибирає значення x для інтерполяції поліномом другого ступеня у вказаному діапазоні. За замовчуванням span=0,75.

Функція **regress** має вигляд:

regress(Vx, Vy, n),

де n – ступінь полінома, рекомендується використовувати $n \le 4$.

Приклад. Дані дослідження:

x	0.5	2	3.5	5	6.5	8	9.5
y	0	3	15	36	66	105	153

Необхідно розв’язати задачу поліноміальної апроксимації та вибрати ступень полінома.

Обчислимо табличні різниці:

y	0	3	15	36	66	105	153
$\Delta^{(1)}$	3	12	21	30	39	48	
$\Delta^{(2)}$	9	9	9	9	9	9	

Оскільки другі табличні різності сталі, то інтерполяційний поліном буде другого порядку (n=2): $y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$. Розв’язок має наступний вигляд:

Початкові умови:

$$Vx := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 3.5 \\ 5 \\ 6.5 \\ 8 \\ 9.5 \end{pmatrix} \qquad Vy := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \\ 36 \\ 66 \\ 105 \\ 153 \end{pmatrix} \qquad x := 1 .. 8$$

Розв'язок:

Vs := regress(Vx,Vy,2)

interp(Vs,Vx,Vy,x)

Після виклику функції **interp** натисканням на клавішу = (дорівнює) маємо відповідь у вигляді вектора:

interp(Vs,Vx,Vy,x)

$2.176 \cdot 10^{-14}$
3
10
21
36
55
78
105

Відгуком функції **interp** не є поліном чи хоча б його коефіцієнти. В цьому суттєвий недолік функції. Вона не дозволяє одержати математичну модель об’єкту.

5.6. Розподіл випадкової величини

Дискретна випадкова величина х, що приймає значення $x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2,\ldots,p_i,\ldots$ може бути задана розподілом – таблицею виду

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

Кожна випадкова величина повністю визначається своєю функцією розподілу.

Якщо X – випадкова величина, то функція $F(x)=P(X<x)$ називається функцією розподілу випадкової величини x. Тут $P(x<x)$ – ймовірність того, що випадкова величина х приймає значення, менше за x.

Функція розподілу будь-якої випадкової величини має такі властивості:

−$F(x)$ визначена на всій числовій прямій;

−$F(x)$ – неспадна функція, тобто коли $x_1 \leq x_2$, *то* $F(x_1) \leq F(x_2)$;

−$F(-\infty)=0$ і $F(\infty)=1$;

−$F(x)$ неперервна зліва.

Якщо функція розподілу $F(x)$ неперервна, то випадкова величина X називається неперервною випадковою величиною. Якщо функція розподілу $F(x)$ неперервно диференційована, то уявлення про випадкову величину дає кількість ймовірності випадкової величини p, яка зв'язана з функцією розподілу $F(x)$ формулами:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{та} \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Звідси випливає, що для будь-якої випадкової величини

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Ймовірність того, що значення випадкової величини x попадає в інтервал (a,b) обчислюється для неперервної випадкової величини за формулою

$$P(a<x<b)=F_x(b)-F_x(a)=\int_a^b f(t)dt,$$

а для дискретної випадкової величини – за формулою

$$P(a<x<b)=\sum_{x_i\in(a,b)} f\cdot p_i$$

Повернемося до заданої на початку розділу випадкової величини.

Функція розподілу випадкової величини з заданим розподілом має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<x1 \\ p_1, & x_1\le x<x_2 \\ p_1+p_2, & x_2\le x<x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}, & x_{n-1}\le x<x_n \\ 1, & x_n\le x \end{cases}$$

Приклад. Скласти робочий документ MathCad з визначенням розподілу випадкової величини, її функції розподілу і графіком функції розподілу для випадкової величини з розподілом:

x	0	0,1	0,5	1	1,1
p	0,1	0,2	0,45	0,2	0,05

При створенні документу використовуються такі інструменти MathCad:

1. Розподіл випадкової величини збережений у матриці *A*. $A_{1,I}$ – значення випадкової величини, $A_{2,I}$ – відповідні ймовірності. Для створення матриці використовується панель **Matrix (Матрицы).**

2. Функцію розподілу, задану різними виразами на різних інтервалах, визначаємо так: розкриваємо панель програмних елементів **Programming (Программирование)** і панель знаків відношень **Boolean (Логическая панель).**

Вводимо ім’я функції *F(x)* і знак присвоювання *"*:*"* , а після натискаємо клацаємо кнопку **Add Line** панелі програмних елементів, вводимо в помічену позицію відповідне значення. За допомогою кнопки **if** панелі програмних елементів вводимо знак нерівності, що визначає інтервал зміни аргументу. Символ ∞ можна ввести, використовуючи панель елементів матаналізу.

3. Графік функції *F(x)* будуємо, використовуючи панель графічних **Graph (График)** елементів:

а саме першу її кнопку **X-Y Plot (Декартовый график)**. Задавши компоненту графіка, проставимо її визначальні властивості: у центральному пункті осі *X* ім'я змінної *X*, у нижній лівій точці – нижню межу зміни X -0.1, у нижній правій точці верхню межу зміни *X* 1.2, у центральному пункті осі *Y* ім'я змінної *F(X)*. Клацнемо за межами графіка для його побудови. Після цього можна відредагувати графік, вибравши вид ліній, спосіб простановки міток і т.д.

Розв'язання:

Розподіл випадкової величини

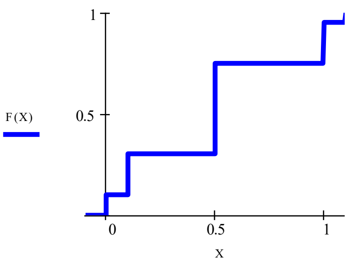
$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.5 & 1 & 1.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.45 & 0.2 & 0.05 \end{pmatrix}$$

Функція розподілу випадкової величини

$$F(x) := \begin{vmatrix} 0 \ \text{ if } \ -\infty < x < A_{1,1} \\ A_{2,1} \ \text{ if } \ A_{1,1} \le x < A_{1,2} \\ \left(A_{2,1} + A_{2,2}\right) \ \text{ if } \ A_{1,2} \le x < A_{1,3} \\ \left(\left(A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3}\right)\right) \ \text{ if } \ A_{1,3} \le x < A_{1,4} \\ \left(A_{2,1} + A_{2,2} + A_{2,3} + A_{2,4}\right) \ \text{ if } \ A_{1,4} \le x < A_{1,5} \\ 1 \ \text{ if } \ A_{1,5} \le x < \infty \end{vmatrix}$$

Графік функції розподілу випадкової величини



5.7. Неперервні випадкові величини

5.7.1. Нормальний розподіл

Цей розподіл відіграє винятково важливу роль в математичній статистиці. Випадкова величина *X* нормально розподілена з параметрами m і σ, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\pi\sigma^2}}$$

Якщо випадкова величина *x* має нормальний розподіл з параметрами m і σ, то будемо записувати це у вигляді *X~N(m,*σ*).*

Випадкова величина x має стандартний нормальний розподіл, якщо *m*=0 та σ=1, *X~N*(0,1). Щільність стандартного нормального розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

а його функція розподілу – *F(x)=Ф(x)*, де *Ф(x)* – функція Лапласа:

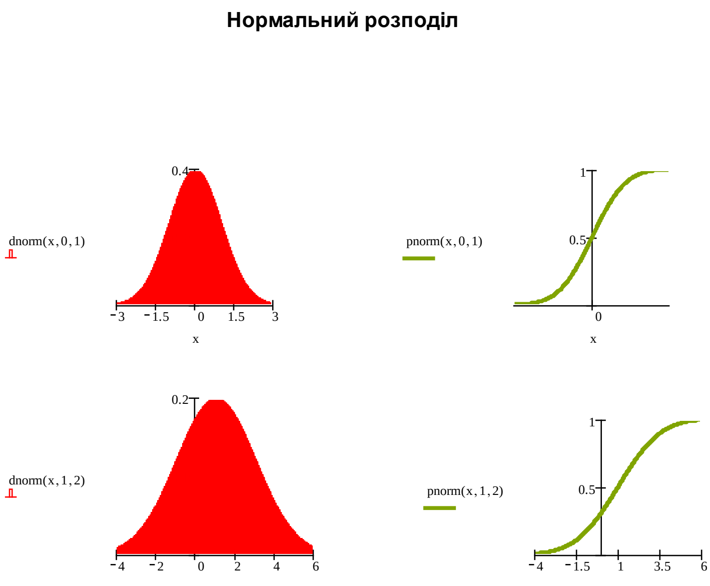
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Функція розподілу нормальної величини також виражається через функцію Лапласа $F(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$

У MathCad значення в точці x щільності розподілу і функції розподілу нормальної випадкової величини з параметрами *m*, σ обчислюються за допомогою вбудованих функцій **dnorm**(*x*,*m*,σ) і **pnorm**(*x*,*m*,σ).

Приклад. Побудувати у MathCad графіки щільності розподілу і функцій розподілу для *x~N*(0,1) і *h~N*(1,2).

Розв'язання:



5.7.2. Квантилі

При розв'язанні практичних завдань часто потрібно знайти значення x, при якому функція розподілу випадкової величини приймає задане значення, тобто потрібно розв'язати рівняння $F(x)=p$. Розв'язання такого рівняння в теорії ймовірностей називаються квантилями.

Квантиллю x (p-квантиллю, квантиллю рівня p) випадкової величини X, що має функцію розподілу $F(x)$, називають розв'язання x_p рівняння $F(x)=p$, $p\in(0,1)$.

Для деяких p рівняння $F_x(x)=p$ може мати декілька розв'язання, для деяких – жодного. Це означає, що для відповідної випадкової величини деякі квантилі визначені неоднозначно, а деякі квантилі не існують.

Квантилі, що найчастіше використовуються в практичних задачах, мають свої назви:

- *медіана* – квантиль рівня 0.5;
- *нижня квартиль* – квантиль рівня 0.25;
- *верхня квартиль* – квантиль рівня 0.75;
- *децилі* – квантилі рівнів 0.1, 0.2, ...,0.9;
- *процентилі* – квантилі рівнів 0.01, 0.02, ...,0.99.

Для тих розподілів, для яких у MathCad представлені вбудовані функції щільності розподілу і функції розподілу, визначені і вбудовані функції обчислення квантилів.

Наприклад, якщо щільність розподілу і функції розподілу для стандартного нормального розподілу визначаються вбудованими функціями *dnorm(x,0,1)* і *pnorm(x,0,1)*, то p-квантиль для цього розподілу є значенням функції *qnorm(x,0,1)*.

Приклад. Обчислити у MathCad медіану, верхню і нижню квартилі і 0.95 – квантиль для стандартного нормального розподілу $N(0,1)$.

Розв’язання:

Квантилі для стандартного нормального розподілу

медіана	$\mathrm{qnorm}(0.5, 0, 1) = 0$
нижня квартиль	$\mathrm{qnorm}(0.25, 0, 1) = -0.674$
верхня квартиль	$\mathrm{qnorm}(0.75, 0, 1) = 0.674$
0.95 − квантиль	$\mathrm{qnorm}(0.95, 0, 1) = 1.645$

6. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Кожна випадкова величина повністю визначається своєю функцією розподілу. В той же час при розв'язку практичних задач необхідно знати кілька числових параметрів, які дозволяють представити основні особливості випадкової величини у стислій формі. До таких величин відносяться в першу чергу математичне очікування, дисперсія, стандартне відхилення та ін.

6.1. Математичне очікування випадкової величини

Математичне очікування – число, довкола якого зосереджені значення випадкової величини.

Якщо X – дискретна випадкова величина з розподілом

x	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

то її математичним очікування М називається величина

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

якщо число значень випадкової величини обмежене. Якщо число значень випадкової величини не обмежене, то

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i$$

При цьому якщо ряд в правій частині рівності розбігається або збігається умовно, то кажуть, що випадкова величина x не має математичного очікування.

Математичне очікування неперервної випадкової величини з щільністю ймовірності f(x) обчислюється за формулою:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

При цьому, якщо інтеграл в правій частині рівності розбігається, то кажуть, що випадкова величина X не має математичного очікування.

При обчисленні математичного очікування корисні такі його властивості:

– математичне очікування константи дорівнює цій константі, тобто

$$M(c)=c$$

– математичне очікування – лінійний функціонал випадкової величини, тобто при довільних сталих a і b справедлива рівняння:

$$M(ax+by)=aMx+bMy$$

– математичне очікування добутку двох незалежних випадкових величин, тобто

$$M(xy)=Mx*My$$

Наприклад, формули математичного очікування для деяких розподілів:

– рівномірний розподіл $\left(f(x)=\frac{1}{b-a}, x\in[a,b]\right): \mathrm{M}=\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$;

– нормальний розподіл N(m, σ) $\left(f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}\right): \mathrm{M}=m$.

6.2. Дисперсія та стандартне відхилення випадкової величини

Дисперсія випадкової величини характеризує міру розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного очікування.

Якщо випадкова величина X має математичне сподівання M, то дисперсією випадкової величини X називається величина $D=M(x\text{-}M)^2$. Легко показати, що $Dx=Mx^2\text{-}(Mx)^2$. Ця універсальна формула застосовується як для дискретних, так і для неперервних величин. Величина $(\mathrm{Mx})^2$ обчислюється за формулами:

$$M=\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2, \qquad M=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

для дискретних і неперервних величин відповідно.

Ще одним параметром для визначення міри розсіювання значень випадкової величини є стандартне або середньоквадратичне відхилення σ, зв'язане з дисперсією співвідношенням $\sigma=\sqrt{D}$.

Перелічимо основні властивості дисперсії:

– дисперсія будь-якої випадкової величини невід'ємна: $D\geq 0$;

– дисперсія константи рівна нулю: $D=0$;

– для довільної константи c: $D(cx)=c^2Dx$;

− дисперсія суми (різниці) двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(x \pm y) = Dx + Dy$.

Приведемо формули для дисперсій найвідоміших стандартних розподілів:

− рівномірний розподіл $D = \frac{(b-a)^2}{12}$;

− нормальний розподіл N(m, σ): $Dx = \sigma$.

Приклад. Знайти за допомогою MathCad математичне очікування та дисперсію випадкової величини X рівномірно розподіленої у інтервалі (a, b).

Визначаємо математичне очікування:

$$\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a$$

Отриманий вираз застосуємо для обчислення дисперсії:

$$\int_a^b \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{b-a}\,dx \text{ factor } \rightarrow \frac{1}{12} \cdot (b-a)^2$$

У прикладі наведені загальні формули, які можна застосовувати для розрахунку математичного очікування та дисперсію випадкової величини, розподіленої рівномірно на конкретному числовому інтервалі.

ПРАКТИЧНА РОБОТА №1

Знайомство з MathCad

Завдання 1. Структура середовища MathCad.

1. Знайдіть на робочому столі ярлик MathCad та відкрийте програму. Зверніть увагу на те, що вся робота в MathCad повинна проводитися на латинськими літерами.

2. Після запуску програми MathCad з’являється вікно з двома областями (рис. 1.1).

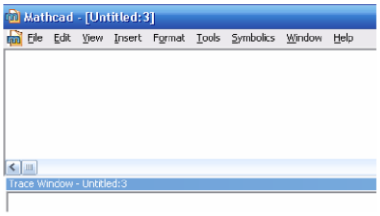


Рис. 1.1. Вікно після запуску

В верхній області, розташовані два рядка з типовими елементами інтерфейсу. Верхній рядок – заголовок вікна. Він відображає назву завантаженого чи видимого з клавіатури документа. Якщо у документа ще не має імені, там з’являється напис Untitled (без назви). Нижче розташоване головне меню.

3. Перемістіть курсор (червоний хрестик) по екрану. Введіть будь-який символ. З’явиться рамка-шаблон.

4. Натиснувши на клавішу миші, виділіть частину екрану з рамкою, натисніть кнопку Вирізати (кнопка з ножицями на панелі інструментів). Шаблон зникне.

5. Виведіть панелі інструментів. Для цього натиснувши мишкою кнопку команди **View (вид)**, виведіть підменю з рядом підкоманд. Якщо кнопки з написами **Toolbar (інструментальна панель)**, **Mathpallete (математична панель)** і **Formatbar (панель форматування)** не відмічені галочкою, натисніть на них і цим виведете на екран ці панелі.

Освойте переміщення панелей по екрану і їх перетворення в рядки меню.

Завдання 2. Введення математичних виразів та тексту.

Укажіть мишею на порожнє місце робочого аркуша та наберіть на клавіатурі: **1+**, потім наберіть **2**, а потім натисніть клавішу із символом рівності **=**, щоб побачити результат. Якщо ви вкажете покажчиком миші поза областю, що редагується, то побачите:

$$\boxed{1 + 2 = 3}$$

Зрозуміло, що можна здійснювати більш складні обчислення. Для введення основних операторів користуйтеся клавішами **+**, **–**, *****, **/**, **^** та/або кнопками арифметичної палітри, яку можна викликати, натиснувши однойменну кнопку математичної панелі.

Завдання 3. Форматування математичних виразів та тексту.

Можна дуже легко модифікувати формати математичних виразів та тексту в робочому аркуші. Ви можете також встановити за умовчанням шрифти, їх розміри та стилі. Зазначені атрибути виводяться на панелі форматування (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Панель форматування

У текстовій області виділіть фрагмент, який ви хочете форматувати по-іншому. Він буде відображатися на екрані в оберненому кольорі. Тепер ви можете для виділеного фрагмента змінити шрифт, його розмір, накреслення (напівжирний, курсив, підкреслений тощо) за допомогою відповідних кнопок.

Завдання 4. Вирази в MathCad.

Математичний вираз у Mathcad є дійсно чудовим об'єктом: це — картинка-зображення на вашому екрані і одночасно це — множина інструкцій для обчислення чогось. Ось чому редактор рівнянь MathCad є унікальною сумішшю текстового процесора та генератора кодів, які покликані вірно представляти та правильно обчислювати вирази. Зосередимося на основних процедурах введення, побудови, редагування математичних виразів, на роботі з текстами та графіками у робочих аркушах Mathcad і т. і.

Кожне рівняння, текстовий абзац або графік у робочому аркуші Mathcad є окремим об'єктом, що зветься "область". Ви можете побачити ці області, вказавши покажчиком миші у порожньому місці екрана, а потім натиснувши її ліву кнопку та потягнувши у якійсь бік через рівняння, текст та графіки. Області, що зустрінуться на шляху будуть оточені прямокутниками зі сторонами з пунктирними лініями. У наведеному нижче прикладі у першому рядку знаходиться текстова область, у другому — математична:

Розглянемо функцію

$$f(x) := 2 \cdot x + 3 + \cos(x)^2$$

Завдання 5. Розрахунки в MathCad.

Для обчислення, наприклад, синуса якогось числа досить увести з клавіатури вираз типу **sin (1/4)=**. Після того як буде натиснута клавіша зі знаком рівності, із правої сторони виразу, з'явиться результат:

$$\sin\left(\frac{1}{4}\right) = 0.247$$

Подібним чином можна проводити і більш складні та громіздкі обчислення, користуючись при цьому всім арсеналом спеціальних функцій, що вбудовані в MathCad. Найпростіший спосіб використання таких функцій: введення імені з клавіатури, як у прикладі з обчисленням синуса, але щоб уникнути можливих помилок в їхньому написанні, краще вибрати інший шлях, який описано в практичній роботі №2.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2

Елементарні обчислення в MathCad

Всі формули в MathCad набираються тільки в латинському алфавіті, тому, перш ніж починати роботу, перейдіть на англійську мову.

1. Запустити програму MathCad з меню "Пуск".

2. Відкрити палітри символів.

3. **Обчисліть 4!** (факторіал числа чотири).

Натисніть кнопку **n!**. На екрані в тому місці, де розташований хрестик, з’явиться шаблон: прямокутна рамка, в середині якої розташований чорний прямокутник зі знаком **!**. Підвівши курсор до цього прямокутника, введемо мишкою або з клавіатури число **4** і натиснемо кнопку = на клавіатурі або на панелі обчислень. Миттєво висвітиться відповідь. За допомогою чорної крапки поряд з відповіддю можна вставити розмірність.

4. Обчисліть логарифм натуральний від 25. Аналогічно попередньому, натисніть на панелі калькулятора кнопку **ln**, в середині кнопок, що з'явилися, вставимо число **25** і, натиснувши =, отримаємо відповідь. Аналогічно обчислюються *sin*, *cos*, *tg* будь-якого кута в радіанах, десятковий логарифм *log*, модуль числа.

5. Обчисліть e^{25}. *Натисніть на панелі калькулятора кнопку* e^{X}. *В чорному прямокутнику верхнього індексу, що з'явиться, наберемо число* **25**, *натиснемо* =.

Велику роль в наборі чисел відіграє розташування кутика (на екрані – він голубого кольору). Наприклад (рис. 2.1), якщо кутик розташований, як показано в лівій частині рисунка, то будь-які знаки операцій (додавання, віднімання і т.п.) будуть додаватися до показника ступеня, якщо ж кутик розташований, як показано в правій частині рисунка, то вони будуть додаватися до всього виразу.

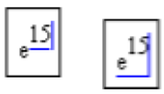


Рис. 2.1. Вплив розташування кутика на обчислення в Mathcad

6. Обчисліть два вирази:

$$e^{15} + \sqrt{47 + 56^3 + \sin(0.6)}$$
$$e^{15} + \sqrt{47} + 56^3 + \sin(0.6)$$

Вирази відрізняються тим, що в першому випадку корінь витягується з трьох доданків, а в другому випадку тільки з числа 47.

Для набору першого виразу наберемо $\mathbf{e^{15}}$, як це було пояснено в попередньому прикладі і, добившись того, щоб куточок обіймав всю ступінь, натиснемо +. Після цього натиснемо кнопку $\sqrt{\blacksquare}$ калькулятора, введемо число

47, доб'ємося, щоб куточок "обіймав" тільки число **47** і продовжимо набір вираження. Для набору **56**$^{\mathbf{3}}$ наберемо спочатку **56**, потім натиснемо на панелі калькулятор кнопку **X**$^{\mathbf{У}}$ і введемо показник ступеня **3**.

При наборі другого виразу куточок після введення числа **47** повинен "обіймати" як число **47**, так і корінь. Решта набору не відрізняється від першого прикладу.

7. Обчисліть дріб:

$$\frac{5*|-6|+4}{8^2}$$

При розв’язку задачі знак модуля вводиться з панелі калькулятора, а дріб з кнопки клавіатури /.

$$\frac{5\cdot|-6|+4^5}{8^2} = 16.469$$

7. Необхідно визначити довжину кола L, якщо розрахункова формула має вид:

$$L = 2\cdot\pi\cdot R$$

У MathCad розрахунок матиме вигляд, зображений на рис. 2.2.

З рис. 2.2 видно, що обчислення здійснюється в три етапи.

На першому етапі необхідно задати значення змінної радіуса кола R . На другому етапі необхідно ввести розрахункову формулу, де іменовану константу **π** вводимо завдяки панелі **Greek (Греческие символы)** меню **Math (Математика).** На останньому кроці необхідно набрати ***L*** та натиснути знак **=і** MathCad видасть відповідь

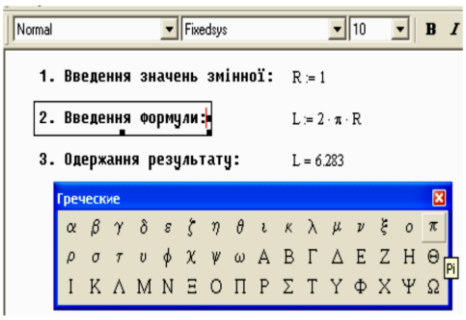


Рис. 2.2. Обчислення довжини кола

При введені пояснень українською мовою необхідно використовувати один із шрифтів, який розуміє кирилицю, наприклад, Fixedsys, інакше програма замість букв видасть незрозумілі ієрогліфи та значки.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3

Спеціальні обчислення у MathCad

Завдання 1. Обчислити функцію $y=4x^2+5x+3$ для $x=1,2,\ ...\ ..10$.

Всі обчислення в MathCad можна виробляти, набираючи їх на клавіатурі, або з допомогою вікна вбудованих функцій. Прості вирази типу обчислення функції набираються безпосередньо на екрані. Обчислення многочлену:

$x := 1, 2 .. 5 \qquad y(x) := 4\cdot x^2 + 5\cdot x + 8$

x =	y(x) =
1	17
2	34
3	59
4	92
5	133

Розв'язання. Спочатку набирається діапазон значень x:

x:=1,2..10.

Тут:

1. використовується знак присвоєння **:=**, а не знак **=**.

2. набирається перше значення x, потім через кому друга його значення, ніж задається крок обчислень, і, нарешті, останнє значення.

*Дві точки між 2 і 10 набираються натисканням клавіші з російською літерою **Ж** клавіатури або кнопки **m..n** панелі матриці.*

Потім, знову-таки через знак присвоєння, набирається вираз для y. причому слід набирати $y(x)$, а не просто y.

MathCad виконує команди зліва направо і зверху вниз. Тому вираз для $y(x)$ має бути розташоване праворуч і трохи нижче вирази **x:=**

Після цього слід набрати **x=** (так само, а не привласнити) і з'явиться стовпець з всіма значеннями x. Так само після натискання ***y(x)*=(*y(x*) дорівнює)** з'являється стовпець обчислення значень *y(x)*. Побудова діапазону зміни аргументу *x* називається ранжуванням.

Завдання 2. Обчислити функцію $y=3x^4-7x^3+4x^2-9x+2$ для x=0,0.5,1,1.5.....3

Пояснення. Читач повинен звернути увагу, що автор задав зайву кількість даних для ранжування *x*. Необхідними даними, які слід вводити, є: перше значення, друге значення через кому, останнє значення після двокрапки, що вводиться, як зазначено вище.

Завдання 3. Обчислити функцію двох змінних $z=3x^2+4y^2+8$ для значень *x* = 1,1.5,2.0, ... 5 і для значень *y* = 0,0.5,1.0, ... 5

Пояснення. Завдання вирішується аналогічно попереднім:

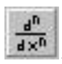
1. спочатку проводиться ранжування обох незалежних змінних *x* і *y*.
2. потім набирається вираз для функції ***z* (*x*, *y*): =**.
3. після цього набирається **x =**, **y =** і **z (x, y) =**.

Завдання 4. Знайти похідну функції $y(x) = x^3$ по х у точці *x* = 2.

Оператор похідної призначений для пошуку чисельного значення похідної функції в заданій точці. Наприклад, щоб знайти похідну функції ***y(x)=x*³** по ***x*** у точці ***x*=2** , треба виконати наступні дії:

1. Визначте точку, у якій необхідно знайти похідну.

Наберіть **x+Shift+:** потім **2**, одержимо **x:=2.**

2. Клацніть нижче визначення **x** . Потім виберіть з панелі інструментів **Calculus Toolbar (Панель вычислений)** піктограму . З'являється оператор похідної з двома полями.

3. Клацніть на полі в знаменнику і наберіть ***x***. Це ім'я змінної, по якій виконується диференціювання.

4. Клацніть на полі праворуч від ***d/dx*** і наберіть ***x³***. Це – вираз, який потрібно диференціювати.

5. Натисніть знак =, щоб побачити результат:

$$x := 2$$

$$\frac{d}{dx}x^3 = 12$$

Наведемо ще кілька прикладів диференціювання за допомогою MathCad.

Завдання 5. Табулювати функцію *y(t):=sin(t)-cos(t)* при зміні аргументу *t* в інтервалі *[-2; 2]* із кроком *0,5*.

Для обчислення значень функції в деякому діапазоні зміни аргументу спочатку необхідно визначити цей дискретний аргумент. Наприклад, якщо потрібно табулювати функцію *y(t):=sin(t)-cos(t)* при зміні аргументу *t* в інтервалі *[-2; 2]* із кроком *0,5*, необхідно виконати такі дії:

1. Задати діапазон зміни змінної у вигляді: ***t*:=** *–2, –1.5 .. 2*

де **–**2 – ліва межа інтервалу; -1,5 – сума лівої межі інтервалу і кроку зміни змінної [*-2 + 0,5 = -1,5*]; **..** – оператор, що встановлюється за допомогою піктограми **Vector and Matrix Toolbar – Range Variable / Операції з векторами і матрицями / Діапазон змінної** (кнопка ); 2 – права межа інтервалу.

2. Задати функцію *y(t):=sin(t)–cos(t).*

3. Увести **t=** (на екран буде виведена таблиця значень *t*).

4. Увести **y(t)=** (на екран буде виведена таблиця значень y (*t*)).

Таблиці значень, що містять від 1 до 10 рядків даних, виводяться на екран повністю. У таблицях з кількістю рядків більше 10 на екран виводяться тільки перші 10 рядків. Для перегляду інших значень необхідно після виділення таблиці скористатися лінійкою прокручування. Вигляд документа MathCad:

$t := -2, -1.5 .. 2$

$y(t) := \sin(t) - \cos(t)$

$t =$

-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

$y(t) =$

-0.493
-1.068
-1.382
-1.357
-1
-0.398
0.301
0.927
1.325

Форматування результатів. Для того, щоб установити формат виводу даних, необхідно:

1. Виділити таблицю, клацнувши по ній мишею.

2. Вибрати пункт меню **Format→Result (Формат→ Результат)**. Опції цього вікна дозволяють встановити кількість десяткових знаків у виведених числах (**Number of decimal places**), межі використання експоненційного зображення чисел (**Exponential threshold**) і др.

3. За замовчуванням для **Exponential threshold (Поріг показника)** приймається значення 3. Це означає, що тільки числа, більші чи рівні 102, відображаються в експоненційному вигляді.

При зміні формату висновку результатів змінюється тільки їх зовнішній вигляд. Внутрішнє зображення чисел MathCad завжди має повну точність.

Завдання 6. Обчислити інтеграл функції *y=sin(x2)* від 0 до $\pi/4$.

Оператор інтегрування в MathCad призначений для одержання чисельного значення інтегрування. Наприклад, визначений інтеграл функції *y=sin(x2)* від 0 до $\pi/4$ може бути обчислений у такий спосіб:

1. Перемістіть курсор на вільне місце і виберіть на панелі **Calculus Toolbar (Панель вычислений)** кнопку . З'явиться знак інтеграла з порожніми полями для виразу, що інтегрується, меж інтегрування та змінної інтегрування:

$$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$$

2. Клацніть на полі внизу і наберіть значення лівої межі **0**. Клацніть на верхньому полі й наберіть значення правої межі $\pi/4$. Отримаємо:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \blacksquare \, d\blacksquare$$

3. Клацніть на полі між знаком інтеграла і **d**. Запишіть формулу ***sin(x²)***. Це – вираз, який треба інтегрувати.

4. Клацніть на полі після **d** і наберіть ***x***. Це – змінна інтегрування.

Потім уведіть знак = для одержання чисельного результату інтегрування.

Розв'язання:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x^2\right)\, dx = 0.157$$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4

Дії над матрицями у MathCad

Завдання 1. Ввести всі вектори та провести з ними всі дії, які проведені на рис. 4.1.

$$v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} 2 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 \\ 5 - x \\ x^3 - x^5 \\ x \end{pmatrix}$$

$$w = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 10 \\ 23 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} 14 \\ 147 \\ -2 \\ -1.646 \times 10^4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad v + V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$W^T = \begin{pmatrix} 14 & 147 & -2 & -1.646 \times 10^4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$W^T \cdot w = -1.64 \times 10^5$$

$$W \cdot w = -1.64 \times 10^5$$

Рис. 4.1. Введення матриць і дії над ними

Матриці в MathCad вводяться так само, як і вектори, але число стовпців в них – більше одиниці. Елементами матриці можуть бути також числа, літери, вирази. Як і в випадку векторів, літерні елементи і елементи – вираження повинні бути попередньо визначені чисельно. На рис. 4.2 показані різні способи введення матриць.

$$a := 3 \quad b := 1 \quad c := 5 \quad d := 9 \quad e := 7 \quad f := 0 \quad x := 2$$

$$v1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad v2 := \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 12 & 21 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad W := \begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x - 5 & x^2 + 10 & x \\ \frac{x}{3} & \frac{x}{5 + x} & x \end{pmatrix}$$

Рис. 4.2. Введення матриць

Завдання 2. Ввести всі матриці, які представлені на рис. 4.3.

Елементи матриць є індексованими змінними, імена яких співпадають з іменами матриць. Для кожної індексованої змінної вказуються два індекси: один – для номера рядка, інший – для номера стовпчика. Наприклад, для матриці W середній елемент позначається як $W_{1,1}$ а останній як $W_{2,2}$. (Індекси набираються через кому). На рис. 4.3 показано зміна індексації при різних значеннях змінної **ORIGIN** (Набирається обов'язково великими літерами).

$$ORIGIN := 0$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 11 & 21 \\ 7 & 10 & 45 \end{pmatrix} \qquad P_{1,1} = 11 \qquad P_{2,1} = 10$$

$$ORIGIN := 1$$

$$P := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 9 & 11 & 21 \\ 7 & 10 & 45 \end{pmatrix} \qquad P_{1,1} = 1 \qquad P_{2,1} = 9$$

Рис. 4.3. Роль змінної ORIGIN

Завдання 3. Провести над матрицями всі дії представлені на рис. 4.4.

$$v1 + v2 = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 16 & 24 \\ 9 & 17 \end{pmatrix} \qquad v1 - v2 = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ -8 & -18 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \qquad v1 \cdot V = \begin{pmatrix} 21 & 15 & 5 \\ 39 & 25 & 20 \\ 69 & 47 & 25 \end{pmatrix}$$

$$W^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0.667 \\ 4 & 14 & 0.286 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad W^{-1} = \begin{pmatrix} 10.286 & -2.143 & -39 \\ 2.75 & -0.5 & -10.5 \\ -3.821 & 0.786 & 15 \end{pmatrix}$$

$$W^3 = \begin{pmatrix} -177.524 & 928.762 & 191.238 \\ -641.714 & 2.4 \times 10^3 & 11.81 \\ -11.492 & 111.401 & 48.762 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.4. Дії над матрицями

У MathCad визначені наступні дії на векторами та матрицями:

1. складання – віднімання,
2. скалярне та векторне множення,

3. перетворення,
4. транспонування,
5. сортування,
6. виділення стовпців.

Вони виконуються з застосуванням кнопок панелі **Matrix (Матрица)**:

Завдання 4. Ввести дві довільні матриці. Перемножити. наприклад:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Перевірте на папері правильність вироблених вище дій

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 56 & 87 & 23 \\ 12 & 23 & 43 \\ 90 & 09 & 56 \end{pmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 350 & 160 & 277 \\ 1.14 \times 10^{3} & 755 & 887 \\ 1.806 \times 10^{3} & 1.153 \times 10^{3} & 1.408 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Перетворення і обчислення визначника можливо тільки для квадратних матриць.

Завдання 5. Введіть довільну квадратну матрицю, знайдіть зворотну їй і обчисліть число визначника, використовуючи вбудовані кнопки панелі **Matrix (Матрица)**.

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} -1.083 & -0.5 & 0.583 \\ 0.667 & 1 & -0.667 \\ 0.25 & -0.5 & 0.25 \end{pmatrix} \qquad C^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|C| = -12$$

Рис. 4.5. Приклад виконання завдання 5

Як відомо, множення матриці на зворотну дає одиничну матрицю. перевіримо, правильно чи було проведено перетворення

$$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 6. Знайти скалярний і векторний добуток двох заданих трьохелементних векторів:

$$vx := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad vx \times vy = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad vx \cdot vy = 36 \qquad vx^T \cdot vy = 36$$

Рис. 4.6. Приклад виконання завдання 6

Перевіримо правильність скалярного множення, перемноживши **vx**$^{\mathbf{T}}$ і **vy**. Отримали також **36**.

При розгляді матриць великих розмірів зручно виділяти їх стовпці.

Завдання 7. Використовуючи кнопку виділення стовпців, виділіть стовпці довільній матриці, наприклад:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 13 \end{pmatrix} \qquad A^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.7. Приклад виконання завдання 7

У MathCad є велика кількість вбудованих функцій для дій над матрицями і векторами. Розглянемо деякі з них.

Обчислення максимального і мінімального елементів матриці або вектора проводиться за допомогою вбудованих функцій **Max (A)** і **Min (A)**.

Завдання 8. Обчислити максимальний і мінімальний елемент довільної матриці, наприклад:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \max(C) = 9 \qquad \min(C) = 1$$

Визначення кількості стовпців і рядків в матриці зручно для перевірки дій над багатовимірними матрицями і векторами. Воно проводиться за допомогою вбудованих функцій **Cols (A)** – число стовпців матриці **A** і **Rows (A)** – число рядків матриці А.

Завдання 9. Визначити число рядків і стовпців в довільній матриці, наприклад:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rows}(C) = 3 \qquad \mathrm{cols}(C) = 3$$

Одинична матриця розміром N формується вбудованою функцією **Idenfity (N)**, а слід матриці – вбудованою функцією **tr (A)**:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{tr}(C) = 15 \qquad \mathrm{identity}(5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання 10. Використовуючи кнопки панелі символьних обчислень, провести аналітичні транспонування і перетворення довільної матриці, наприклад:

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} \rightarrow \frac{1}{28} \cdot \begin{pmatrix} -64 & 16 & 12 \\ -11 & 1 & 6 \\ 38 & -6 & -8 \end{pmatrix} \qquad |A| \rightarrow 28$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 & 17 & 20 \\ 31 & 35 & 37 & 56 & 76 \\ 65 & 90 & 32 & 21 & 98 \\ 8 & 56 & 37 & 47 & 89 \end{pmatrix} \qquad C^T \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 11 & 31 & 65 & 8 \\ 3 & 13 & 35 & 90 & 56 \\ 5 & 15 & 37 & 32 & 37 \\ 7 & 17 & 56 & 21 & 47 \\ 9 & 20 & 76 & 98 & 89 \end{pmatrix}$$

Рис. 4.8. Приклад символьного рішення матричних задач

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

Розв’язок алгебраїчних рівнянь у MathCad

У даній практичній роботі будуть розглянуті чисельний та аналітичний методи алгебраїчних рівнянь у MathCad.

Чисельне рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь. При чисельному рішенні систем лінійних рівнянь використовується спеціальний численний блок, що відкривається блоком **Given**. Блок має наступну структуру: завдання початкових наближень, **Given**, рівняння, обмежувальні умови вираження з функцією **find**.

Завдання 1. Вирішити систему:

$3x + 8y - 9z = 12$

$5x - 9y + 2z = 34$

8x-6y + 5z = 98.

Для цього необхідно здійснити наступні дії:

1. Набрати початкові наближення – довільні числа

x: = 1 *y*: = 1 *z*: = 1

2. Набрати з клавіатури директиву **given** (дано);

3. Набрати систему рівнянь, обов'язково записуючи знак множення, причому знак = потрібно набирати ні на арифметичної панелі, а на панелі логіки, яка виводиться на екран кнопкою  математичної панелі.

4. Набрати вираз *otvet: = find (x, y, z)*

5. Набрати *otvet* =

Після цього буде отримана відповідь у вигляді вектора-стовпця.

Замість слова *otvet* можна використовувати будь-який набір букв і цифр, що починається з літери. Цей набір позначає ім'я, яке Ви привласнюєте вектору відповідей.

Розв'язання:

$x := 1 \qquad y := 1 \qquad z := 1$

given

$$3x + 8y - 9z = 12$$

$$5x - 9y + 2z = 34$$

$$8x - 6y + 5z = 98$$

$$otvet := find(x, y, z) \qquad otvet = \begin{pmatrix} 11.457 \\ 3.913 \\ 5.964 \end{pmatrix}$$

Завдання 2. Вирішіть самостійно наведені нижче системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

А) 5x+6y-9z+2v-7w=90
3x-4y+5z-3v+4w=12
9x+y +3z-2v +9w=51
7x+2y-8z+v +10w=32
6x+5y-4z+3v-2w= 87

Б) 4.5x+7.9y-2.1v+6.75w+7.9u= 43
5.6x+7.2y+9.8z+3.9v+3.4w+8.3u=12.54
5.6x+98.5y+43.7z+67.85v+4.9w+21.5u = 54.98
65.75x+54.32y-78.32z-565.9v+32w+78.54u = 55.5
54.2x+76.45y+32.23z+ 45.71v+43.43w+ u = 65.21
8.9x+9.8y-5.6z+6.5v-4.5w+2.1u = 0

Подібним чином можна вирішувати і нелінійні рівняння. Однак вони мають кілька коренів. Якщо задатися початковими наближеннями, ми знайдемо в кращому випадку один корінь, найближчий до початкового наближення. Таким способом має сенс шукати корні трансцендентних рівнянь, що мають, як відомо, нескінченну кількість коренів.

Завдання 3. Знайти корінь трансцендентного рівняння

X sin (x) + cos (x) = 25,

найближчий *x* = 1.

Набираємо завдання описаним вище способом і знаходимо значення x.

Однак отримати рішення при початковому наближенні 10 нам не вдасться.

MathCad дозволяє вирішувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь в матричній формі. Рішення можна отримати двома способами.

<u>1 спосіб</u>.

Як відомо, система лінійних алгебраїчних рівнянь в матричної формі має вид:

AX = B де

A – квадратна матриця коефіцієнтів,

X – вектор-стовпець невідомих,

B – вектор-стовпець правих частин.

Рішення системи в матричної формі: $X = A^{-1}B$.

Вирішимо в матричної формі систему:

$$\begin{aligned} 11x + 12y + 31z &= 9 \\ 4x + 52y + 69z &= 8 \\ 7x + 86y + 93z &= 7 \end{aligned}$$

Для цього:

1. Наберемо ***ORIGIN: = 1***. Як говорилося вище, це означає, що рахунок елементів буде проводитися не з нуля, а з одиниці.

2. Введемо матрицю ***A***.

3. Введемо вектор-стовпець ***B***.

4. Набор вираження для ***X*** бажано виконувати, використовуючи

відповідну кнопку матричної панелі.

5. Після цього наберемо ***X*=** і відразу отримаємо вектор відповіді:

$$A = \begin{bmatrix} 1\_12\_31 \\ 4\_52\_69 \\ 7\_86\_93 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1} \cdot B \qquad X = \begin{pmatrix} 7.694 \\ -1.016 \\ 0.435 \end{pmatrix}$$

<u>2 спосіб</u>.

Можливо отримання рішення матричного рівняння за допомогою спеціальної функції l**solve**:

$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 12 & 31 \\ 4 & 52 & 69 \\ 7 & 86 & 93 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{lsolve}(A, B)$$

$$X = \begin{pmatrix} 7.694 \\ -1.016 \\ 0.435 \end{pmatrix}$$

Завдання 4. Вирішити варіанти А, Б завдання 2 в матричної формі самостійно.

Чисельне рішення нелінійних алгебраїчних рівнянь. У MathCad корні алгебри і систем визначаються за допомогою наступних вбудованих функцій:

1. **Функція root (expr, var)** обчислює дійсне значення змінної *var*, при якому вираз *expr* дорівнює нулю, тобто вона обчислює один дійсний корінь рівняння. При цьому необхідно поставити його початкове наближення. Нижче наведено приклад заходів використання цієї функції для знаходження дійсного кореня рівняння $x^2 + 2x + 1 = 0$.

Саме рівняння не набирається!

2. **Функція polyroots (v)** дозволяє обчислювати все коріння полінома. Наприклад, для вирішення рівняння

$$8x^2 + 2x +3 = 0$$

набираємо або зчитуємо з таблиці функцій (кнопка *f (x)*) функцію **polyroots** і в дужках заповнюємо вектор, вставляючи коефіцієнти рівняння. Натискаємо клавішу = *і* отримуємо відповідь:

$$\text{polyroots}\left(\begin{pmatrix}3\\2\\8\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0.125-0.599i\\-0.125+0.599i\end{pmatrix}$$

Слід звернути увагу, на те, що перший елемент вектора відповідає коефіцієнт рівняння при вільному члені.

Завдання 5. Обчислити у MathCad коріння наведеного вище рівняння.

Завдання 6. Вичисліть все корені многочленів

1. $5x^5 + 6x^3 + 8x^2 + 2x = 0$
2. $5x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 9x + 8 = 0$
3. $4x^4 + 8x-3 = 0$

Рішення алгебраїчних рівнянь в аналітичній (символьної) формі. MathCad надає можливість вирішення алгебраїчних рівнянь в символьній (аналітичній) формі. Перевагою символьного рішення є можливість рішення рівнянь з літерними значеннями коефіцієнтів. Правда, більш-менш складні рівняння символьно в MathCad не вирішуються, тому доводиться звертатися до чисельних методів.

Рішення систем лінійних рівнянь. Символьний розв'язок лінійних систем алгебраїчних рівнянь проводиться з допомогою двох операцій: **Solve (Вирішити)** і **lsolve**. Нижче представлено рішення систем лінійних рівнянь різними методами.

Завдання 7. Система лінійних алгебраїчних рівнянь задана матрицею *М* коефіцієнтів і вектором *v* правих частин. Знайти аналітичне рішення.

Спочатку вводимо матрицю і вектор.

$$M:=\begin{pmatrix}0.3 & 0.2 & 6.6 & -1.1\\4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5\\-7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1\\8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9\end{pmatrix}\qquad v:=\begin{pmatrix}1\\0.1\\0.01\\1\times10^{-3}\end{pmatrix}$$

1. рішення з використанням вбудованої функції **lsolve**. Функція набирається з клавіатури або з вікна вбудованих функцій. Стрілка набирається з панелі символьних рішень.

$$\mathrm{lsolve}(M, v) \rightarrow \begin{pmatrix} -3.9371585952195628203 \\ -2.9752573457871181164 \\ .7459060209508983589 5 \\ 1.9516188095933060907 \end{pmatrix}$$

2. Рішення з використанням оператора **solve**:

$$M \cdot \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} - v \ \left| \begin{matrix} \mathrm{solve}, w, x, y, z \\ \mathrm{float}, 4 \end{matrix} \right. \rightarrow (-3.937 \ \ -2.975 \ \ .7459 \ \ 1.952)$$

Тут крім оператора **lsolve** використаний оператор **float** (плаваюча точка) і задана точність рішення – 4 знаки.

Оператори **solve** і **float** набираються послідовно.

3. Рішення в скалярною формі:

$$\begin{pmatrix} 0.3 \cdot w + 0.2 \cdot x + 6.6 \cdot y - 1.1 \cdot z = 1 \\ 4.5 \cdot w - 1.8 \cdot x - 0.3 \cdot y + 6.5 \cdot z = 0.1 \\ -7.3 \cdot w + 9.7 \cdot x + 10.9 \cdot y - 4.1 \cdot z = 0.01 \\ 8.1 \cdot w - 2.7 \cdot x + 8.7 \cdot y + 8.9 \cdot z = 1 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} \mathrm{solve}, w, x, y, z \\ \mathrm{float}, 4 \end{matrix} \right. \rightarrow (-3.937 \ \ -2.975 \ \ .7459 \ \ 1.952)$$

4. Рішення зі створенням вирішального блоку і директиви **given**. Діректіва **given** і оператор **Find** набираються з клавіатури:

Given

$$3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 + 4 \cdot x3 + 6x4 + 8x5 = 21$$

$$5 \cdot x1 + 7 \cdot x2 + 8 \cdot x3 - 7x4 - 9x5 = 34$$

$$9 \cdot x1 + 12 \cdot x2 + 9 \cdot x3 + 8x4 + 4x5 = 41$$

$$13 \cdot x1 + 3 \cdot x2 + 19 \cdot x3 + 18x4 + 9x5 = 141$$

$$23 \cdot x1 + 13 \cdot x2 + 9 \cdot x3 + 8x4 + 19x5 = 241$$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3, x4, x5) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{30965}{2539} \\ \frac{-58955}{10156} \\ \frac{4366}{2539} \\ \frac{-15189}{5078} \\ \frac{23741}{10156} \end{pmatrix}$$

5. Рішення системи з літерними коефіцієнтами:

Given

$$a1 \cdot x + b1 \cdot y + c1 \cdot z = d1$$

$$a2 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d2$$

$$a3 \cdot x + b2 \cdot y + c2 \cdot z = d3$$

$$\mathrm{Find}(x,y,z) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{(-d3)+d2}{(-a3)+a2} \\ \dfrac{-[(-a2)\cdot c2\cdot d1 + a2\cdot d3\cdot c1 + c2\cdot a1\cdot d2 - c2\cdot a1\cdot d3 + c2\cdot d1\cdot a3 - d2\cdot a3\cdot c1]}{[(-a3)+a2]\cdot(b1\cdot c2 - c1\cdot b2)} \\ \dfrac{-[(-a1)\cdot b2\cdot d2 - b1\cdot a2\cdot d3 + b1\cdot a3\cdot d2 + a1\cdot d3\cdot b2 - d1\cdot a3\cdot b2 + d1\cdot b2\cdot a2]}{b1\cdot a2\cdot c2 - b1\cdot a3\cdot c2 + c1\cdot a3\cdot b2 - c1\cdot b2\cdot a2} \end{bmatrix}$$

Символьний розв'язок нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Завдання 8. Вирішити наведені нижче рівняння.

1. Рішення рівняння четвертого ступеня з чисельними коефіцієнтами з виконям оператора **solve:**

$$3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 9x + 10 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} (-1.1260186005688105923 - .75699694283657936689 \\ (-1.1260186005688105923 + .75699694283657936689 \\ .29268526723547725894 - 1.3133859400283537322 \\ .29268526723547725894 + 1.3133859400283537322 \end{bmatrix}$$

2. Рішення квадратного рівняння з літерними коефіцієнтами:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2\cdot a}\cdot\left[(-b) + \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ \dfrac{1}{2\cdot a}\cdot\left[(-b) - \left(b^2 - 4\cdot a\cdot c\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{bmatrix}$$

3. Рішення квадратного рівняння з літерними коефіцієнтами з формуванням вирішального блоку:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Givei

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$$

$$M(\alpha, r) := \mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot\alpha & \frac{1}{2}\cdot\alpha \\ \frac{1}{2}\cdot\left[\left(-\alpha^2\right) + 4\cdot r^2\right]^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2}\cdot\left[\left(-\alpha^2\right) + 4\cdot r^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

Але вже кубічне рівняння з літерними коефіцієнтами не вирішується!

Завдання 9. Вирішити наведені нижче рівняння самостійно

1. $x^2+x+1=0$

2. $3x^3+2x^2+5x+6=0$

3. $ax^4+bx^2+d=0$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

Диференціювання та інтегрування у MathCad

Чисельне диференціювання та інтегрування. Для проведення чисельного диференціювання у MathCad необхідно:

1. задати діапазон зміни аргументу.

2. Записати диференційовану функцію.

3. Ввести з панелі обчислень **Calculus (Вычисления)** знак диференціювання.

Наприклад:

$x := 1..5 \quad y(x) := 3x^2 + 2\cdot x + 1C$

$\frac{d}{dx}y(x) =$

8
14
20
26
32

$x := 0, 0.5..3 \quad y(x) := 5x^{15} + 10x^{10} + x$

$\frac{d^2}{dx^2}y(x) =$

0
3.644
$1.95\cdot10^3$
$2.274\cdot10^5$
$8.832\cdot10^6$
$1.578\cdot10^8$
$1.68\cdot10^9$

Завдання 1. Провести диференціювання наведених вище виразів.

Завдання 2. Знайти самостійно першу, другу і третю похідні для функцій:

y=7x^15+9x^4+5x+8

y=3x+10x^2

Для обчислення певних інтегралів у MathCad необхідно:

1. Визвати панель інтегрування і диференціювання, натиснувши на арифметичної панелі кнопку з зображенням інтегралів і похідних.

2. Набравши на екрані **y:=**, натиснути кнопку із зображенням певної інтеграла і викликавши його, проставити границі інтегрування і підінтегральну функцію.

3. Набрати нижче інтеграла ***y*** **=** та отримати відповідь:

$$\int_0^4 \left(x^5 + 6x^2\right) dx = 810.667$$

Завдання 3. Обчислити самостійно нижченаведені інтеграли:

$A)$.	$B)$
$y = 5x^3 + 9x^2$	$y = 5\sin x + 8\cos 4x$
$a = 4$	$a = 0$
$b = 9$	$b = 5$

Символьне диференціювання та інтегрування:

Нижче наведено приклад **диференціювання**. Замість знака = ставиться стрілка з панелі символьних рішень.

Завдання 4. Провести самостійно аналітичне диференціювання наступних функцій:

А) $y = \sin(x)$

Б) $y = \sin(x)\cdot\sqrt{x^2 + 8\cdot x}$

В) $y = \cos(x)^3\cdot\sqrt[4]{x^5 + 6\cdot x^3\cdot\frac{1}{x+7}}$

Нижче наведені приклади символьного **інтегрування** у MathCad. Знак невизначеного інтеграла вводиться з панелі обчислень, стрілка – з панелі символьних рішень.

Приклад 1.

$$\int x^n\,dx \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Приклад 2.

$$\int \sqrt{x^2+1}\,dx \to \frac{1}{2}\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{asinh}(x)$$

Приклад 3. Даний інтеграл символьно у MathCad не вирішується, але Ви подивіться, що MathCad зробить з ним:

$$\int \sqrt[2]{x^3+1}\,dx \to \frac{2}{5}\cdot x\cdot\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{indef\_int}\left[\frac{3}{5\cdot\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}}, x\right]$$

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 7

Побудова графіків у MathCad

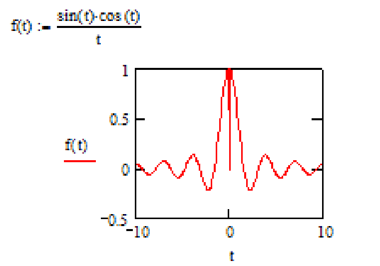
Завдання 1. Побудова графіка функції. Розглянемо найпростіший спосіб побудови графіка функції. Для цього виконаємо такі дії:

1. Визначити функцію. Наприклад, $f(t) = \dfrac{\sin(t)\cdot\cos(t)}{t}$.

2. Ввести шаблон графіка в Декартову систему координат за допомогою меню **Insert?Graph?X-Y-Plot**, або за допомогою панелі графіків **Graph Toolbar**.

3. З'явиться незаповнений шаблон. Шаблон представляє собою великий пустий прямокутник з місцями введення даних у вигляді маленьких чорних прямокутників (маркери введення), які розміщені біля осей майбутнього графіка. Введемо ім'я змінної в середнє поле введення біля осі абсцис і ім'я функції в середнє поле введення коло осі ординат.

4. Клацніть мишею поза області графіку – він буде побудований.



Завдання 2. Побудувати графік двох функцій:

$Y(x) = 2sin^2(x), z(x) = 5cos^3(x)$ в межах 0<=*x*<=20

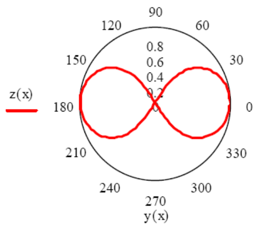
Завдання 3. Побудувати фігуру Ліссажу.

Графіки в полярних координатах Polar Plot (Полярний графік). Такі графіки задаються натисканням кнопки з зображенням графіка в полярних координатах. Нижче наведено побудову відомої фігури Ліссажу в полярних координатах:

$$x := 0, 0.05 .. 2 \cdot \pi$$

$$y(x) := \sin(x)$$

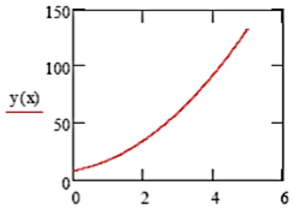
$$z(x) := \cos(x)$$



Завдання 4. Обчислити функцію, якщо *x* змінюється від 0,001 до 5 з кроком 0,2, результат отримати у вигляді графіка:

$$x := 0, 0.01 .. 5$$

$$y(x) := 4x^2 + 5x + 8$$



Редагування графіків:

1. В декардовій системі координат. Якщо з якоїсь причини зовнішній вид графіка не задовільний, то його можна змінити за допомогою вікна **Formatting Currently Selected X-Y Plot (Форматирование выбранного графика X-Y),** яке містить вкладки **X-Y Axes (Оси X-Y)** – форматування осей**, Traces (Трассировка)** – тип ліній графіків, **Labels (Подписи), Defaults (по умолчанию)** (рис. 7.1).

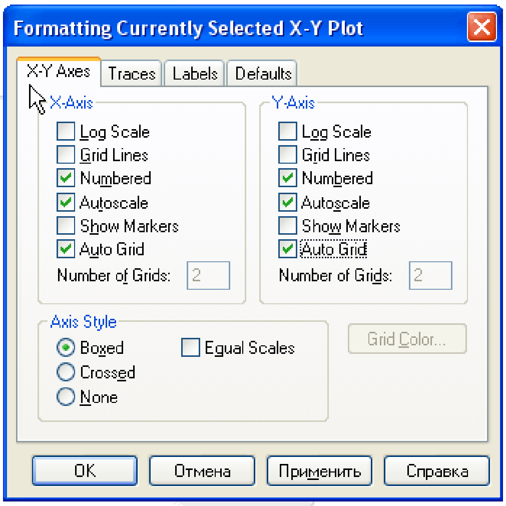


Рис. 7.1. Діалогове вікно Formatting Currently Selected X-Y Plot (Форматирование выбранного графика X-Y)

2. Тривимірних графіків. Зовнішній вид створеного трьохмірного графіка можна змінити виконавши команду **Format (Формат)→Graph (График)→ 3D Plot (Формат 3D)** або виконавши подвійне натискання мишкою на графічній області. В результаті на екрані з'явиться вікно **3D Plot Format (Формат 3D Графика)**, що дозволяє змінювати параметри відображення графіка (рис. 7.2).

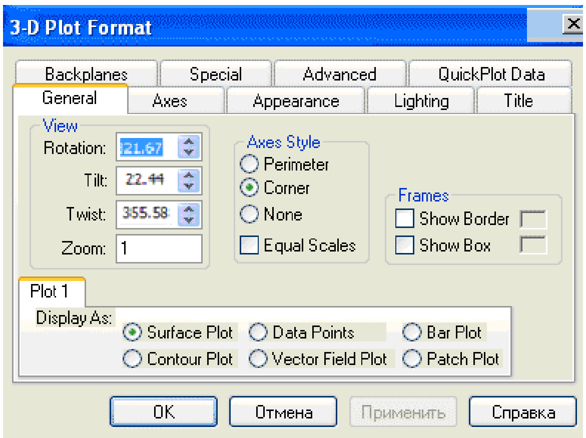


Рис. 7.2. Діалогове вікно 3D Plot Format (Формат 3D Графика)

Завдання 5. Змінити на побудованих раніше графіках:

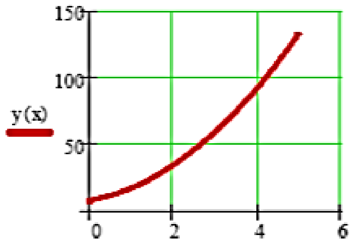
– товщину лінії;

– замінити суцільну лінію пунктиром;

– змінити колір графіка на зелений;

– здійснити нанесення осей координат;

– розташувати над графіком заголовок "Обчислення функції".



Завдання 6. Побудувати на цьому графіку ще одну криву функції.

$$x:=0,0.1..5 \quad y_1(x):=4x^2+5x+8 \quad y_2(x):=3x^2-7x^3+4x^2+2$$

Для цього:

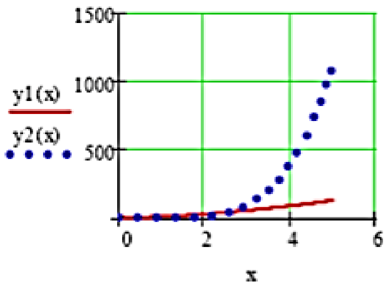
– проведемо ранжування аргументу *x*;

– набираємо дві функції;

– вводимо першу функцію;

– потім підведемо курсор до запису на осі *y* і натиснемо клавішу **кома** клавіатури;

– під записом *y(x)* з’явиться маркер, в який введемо ім’я другої функції.



Змінити параметри графіка.

Завдання 7. У MathCad можна будувати різні **тривимірні графіки**: поверхневі, рівнів, стовпчикові діаграми і т. п. Для прикладу побудуємо поверхневий графік функції:

$$z=55x^2+25y^2 \text{ для } 0<=x<=40,\ 0<=y<=50.$$

1. Перш за все, потрібно визначити вузли, в яких буде обчислюватися функція. Запишемо:

i:=0..40 **j:=0..50**

Після цієї записи функція буде обчислюватися в точках з координатами *i=0, j=0: i = 0, i=1, j=1* і т.п.

2. Потрібно встановити зв'язок аргументів *x* і *y* з вузлами. Запишемо:

x_i=i **y_j=j**

3. Запішем саму функцію **$z(x, y) = 55x^2+25y^2$**.

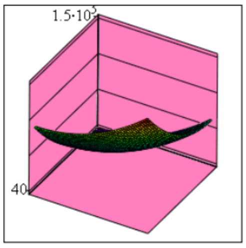
4. Визначимо матрицю ординат, за якими буде будуватися графік: **$M_{i,j}= z(x_i, y_j)$**.

5. Після цього викличемо поверхневий графік з панелі графіків і поставимо в нижньому правому куті М. Потім, вийшовши з графіка, клацнемо курсором. Графік буде побудований:

$i := 0..40 \quad j := 0..50 \quad x_i := i \quad y_j := j$

$z(x,y) := 55\cdot x^2 + 25\cdot y^2$

$M_{i,j} := z(x_i, y_j)$



M

Ввівши курсор всередину графіка, і клацнувши мишею, ми знову викличемо вікно, в якому можна встановити всі параметри графіка.

На сторінці **Viev (Вид)** встановлюється тип графіка: **Display as** – показувати у вигляді (поверхні, лінії рівня, стовпчикова діаграма), тип осі **Axis** (у вигляді безпосередньо осей, у вигляді площин, відсутність осей), показ заднього плану (**Back Planes**): показувати (**Show**), заповнювати колір поверхні (**Fill Color**) і кромки (**Edge Color**) і кут, під яким показується осі координат.

Залежно від обраного типу графіка змінюється набір написів на інших сторінки. Наприклад, для графіка **Surface Plot (Поверхностный график)** на сторінці **Color and Lines (Цвет и линии)** нанесені написи: **Shading (Затенение)**.

На сторінці **Axis (Оси)** нанесена та ж, що і для випадку плоских графіків написи, але тепер вже для трьох осей: **Gird Lines** – нанесення сітки координат, **Numbered** – оцифровка відповідної осі, **Autoscale** – автоматична розмітка осі, **Shove Markers** – показати мітки по осях, **Autogird** – автоматичний показ сітка координат, **Numbers of Grids** – оцифровка сітки.

Завдання 7. Побудувати графік функції, наведеної в тексті, вибравши зелений колір поверхні, рожевий колір заднього плану, кут представлення 45 градусів і оцифровані осі.

2. Побудувати для тієї ж функції графік рівнів і стовпчикові діаграм.

Завдання 8. Побудувати графік функції $z=3x^3-4y^2$ для $0<=x<=3$, $0<=y<=4$.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 8

Апроксимація та обробка даних спостереження у MathCad

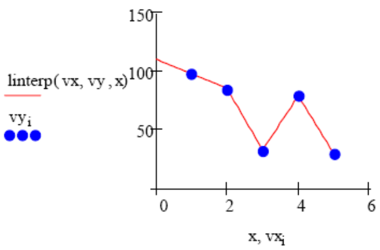
Апроксимація функцій.

Кусково-лінійна апроксимація.

Кусково-лінійна апроксимація проводиться функцією **linterp (vx, vy, x)**

Тут **vx** – вектор аргументів *x* точок, через які повинна пройти крива, **vy** – вектор ординат у тих самих точок, *x* – значення аргументу апроксимуючої функції.

$$vx := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 98 \\ 85 \\ 32 \\ 79 \\ 30 \end{pmatrix} \qquad x := 0, 0.1 .. 5 \qquad i := 0 .. 4$$



Завдання 1. Провести кусочно-лінійну апроксимацію наведеного прикладу.

Апроксимація сплайнами. При невеликому числі вузлових точок (менше 10) лінійна інтерполяція виявляється досить грубою. При ній навіть перша похідна функції апроксимації відчуває різкі скачки в вузлових точках. Для цілей **екстраполяції** функція **linterp** не призначена і за межами області визначення може поводитися непередбачувано.

Набагато кращі результати дає сплайн-апроксимація. При ній початкова функція замінюється відрізками квадратних або кубічних поліномів, що проходять через три суміжні вузлові точки. Коефіцієнти поліномів розраховуються так, щоб безперервними були перша і друга похідні. Лінія, яку описує сплайн-функція, нагадує за формою гнучку лінійку, закріплену в вузлових точках (звідси і назва апроксимації: **splain** – гнучка лінійка).

Для здійснення сплайновой апроксимації система MathCad пропонує чотири вбудовані функції. Три з них служать для отримання векторів других похідних сплайн-функцій при різному вигляді інтерполяції:

cspline (*VX, VY*) – повертає вектор *VS* других похідних при наближенні в опорних точках до кубічного поліному;

pspline (*VX, VY*) – повертає вектор *VS* других похідних при наближенні до опорних точок параболічної кривої;

lspline (*VX, VY*) – повертає вектор *VS* других похідних при наближенні до опорних точок прямої;

interp (*VS, VX, VY, x*) повертає значення *y*(*x*) для заданих векторів *VS, VX, VY* і заданого значення x.

Таким чином, сплайн-апроксимація проводиться в два етапи. На першому етапі за допомогою функцій **cspline**, **pspline** або **Ispline** відшукується вектор других похідних функції *y(x)*, заданої векторами *VX* і *VY* її значень (абсцис і ординат). Потім, на другому етапі для кожної шуканої точки обчислюється значення *y(x)* за допомогою функції **interp**.

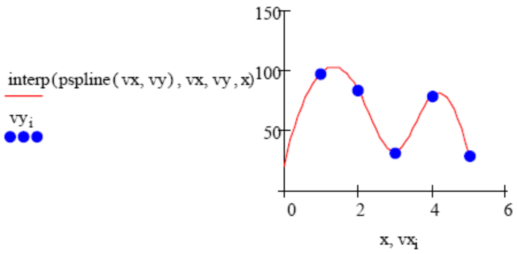
Нижче наведено приклад апроксимації квадратичними (параболічними) сплайнами. Апроксимація проведена для тих же заданих точок, що і в попередньому прикладі. Набрані вектора *vx, vy* і за допомогою функції **pspline** отримані коефіцієнти сплайнів. Щоб переконатися, що апроксимуюча крива проходить через задані точки, функція **interp** обчислена для заданих значень *x*. Тому результатом **interp** з'явилися задані значення *y*. Щоб більш точно переглянути апроксимуючу криву для графіка *x* заданий в тому ж інтервалі, але з кроком 0,1. Як бачимо з графіка, апроксимація сплайнами абсолютно не схожа на кусочно-лінійну апроксимацію.

У функції **interp** – *vx, vy*– ті ж вектори заданих значень, а *vs* – вектор коефіцієнтів рівнянь для сплайнів, отриманий з функцій **pspline** або **cspline**.

Завдання 2. Набрати у MathCad і отримати графіки рішення для наведеного прикладу.

$$i := 0..4 \qquad x := 0, 0.1..5$$

$$vx := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad vy := \begin{pmatrix} 98 \\ 85 \\ 32 \\ 79 \\ 30 \end{pmatrix}$$



У MathCad існують цілий набір вбудованих функцій для обчислення числових характеристик випадкової величини. До них відносяться:

1. **mean (*A*)** – повертає середнє значення вектора A.

2. **cvar (*A, B*)** – повертає кореляційний момент випадкових векторів *A* і *B*.

3. **stdev (*A*)** – повертає стандартне (середньоквадратичне) відхилення елементів вектора *A*.

4. **corr (*vx, vy*)** – возвращает коефіцієнт кореляції векторів *vx vy*.

6. **hist (*i, v*)** – функція побудова гістограми. Тут *i* – вектор границь інтервалу, *v* – вектор випадкових спостережень. Відповідь отримуємо у вигляді вектора розмірністю вектора i, в якому вміщено кількість значень випадкової величини, що потрапила в кожен інтервал та ін.

Завдання 3. Провести рішення та побудову графіка. Нижче представлено обчислення середнього арифметичного і среднеквадратіческого (стандартного) відхилення вектора випадкових величин *x*.

$$x := \begin{pmatrix} 6.4 \\ 7.6 \\ 2.3 \\ 1.8 \\ 5.9 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\text{mean}(x) = 4.8 \\ &\text{stdev}(x) = 2.318 \end{aligned}$$

Завдання 4. Обчислити кореляційний момент та коефіцієнт кореляції по заданим реалізаціям випадкових величин *X, У* і *Z, W*:

$$x := \begin{pmatrix} 768.4 \\ 983.3 \\ 692.1 \\ 597.0 \\ 859.0 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 374 \\ 565 \\ 126 \\ 877 \\ 492 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \mathrm{cvar}(x,y) = -4.415 \times 10^{3} \\ \mathrm{corr}(x,y) = -0.135 \end{array} \qquad z := \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} 100 \\ 121 \\ 144 \\ 169 \\ 196 \\ 225 \\ 256 \\ 289 \\ 324 \\ 361 \end{pmatrix} \quad \mathrm{corr}(z,w) = 0.996$$

Примітка: випадкова величина w є невипадковою функцією (квадратом) величини Z. Тому теоретично коефіцієнт кореляції мав би дорівнювати 1.

Завдання 5. Відомо, що мірою статистичного зв'язку двох випадкових величин є їх коефіцієнт взаємної кореляції, який визначається за формулою:

$$r_{x,y} = \frac{K_{x,y}}{\sqrt{D_x}\sqrt{D_y}}$$

де $K_{x,\ y}$ – кореляційний момент двох випадкових величин, а D_x, D_y – дисперсії випадкових величин.

Коефіцієнт кореляції може змінюватися в межах $-1 <= r_{x,y} <= 1$. Знайти коефіцієнт кореляції за наведеними даними:

5	1	90	67	34	34	21
100	5	55	2	9	0	11

Завдання 6. По заданим реалізаціям випадкової величини X побудувати її гістограму. Вироблено 500 спостережень. Результати спостережень зведені в статистичний ряд:

Інтервали спостережень	-4;-3	-3;-2	-2;-1	-1;0	0;1	1;2	2;3	3;4
Число спостережень у даному інтервалі	6	25	72	133	120	88	46	10
Частота m/n	0.012	0.05	0.144	0.266	0.240	0.176	0.092	0.02

Потрібно побудувати гістограму цього ряду. Гістограма реалізується у MathCad з допомогою декількох функцій. Так як нам вже задані частоти потрапляння випадкової величини в кожен інтервал, то ми побудуємо її наступним чином:

1. Сформуємо вектори інтервалів спостережень v і частот f.

2. $v^T = (-4\ \ -3\ \ -2\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ $f^T = (0.012\ \ 0.05\ \ 0.144\ \ 0.266\ \ 0.24\ \ 0.176\ \ 0.092\ \ 0.02)$

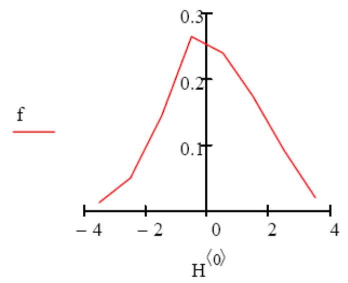
3. Використовуючи функцію **Histogram**, знайдемо центри кожного інтервалу:

$$H := \text{histogram}(v, f)$$

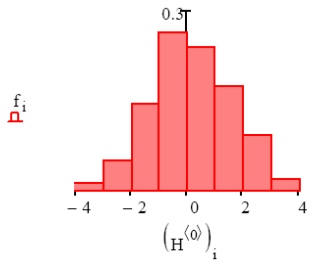
$$H^T = \begin{pmatrix} -3.5 & -2.5 & -1.5 & -0.5 & 0.5 & 1.5 & 2.5 & 3.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця *H* також приведена в транспонованою формі. Побудуємо плоский графік, ввівши по осі абсцис перший стовпець матриці *H*, а по осі ординат – вектор *f*.

$i := 0..8$



Викличемо на панелі форматування **Formating Currently Selected X-Y Plot** вікно **Traces (Следы)** і в стовпчику **Тип** виберемо рядок **Solid Bar**. Отримаємо графік гістограми, показаної нижче.



Завдання 7. У багатьох випадках при статистичних обчисленнях потрібно проводити вирівнювання статистичних рядів, тобто сортування їх по зростанню аргументу.

Для цього можна використовувати функцію **csort**.

Нехай для значень аргументу *X*, представленого вектором *X* зроблені спостереження *Y* і *Z*, представлені векторами y і z.

$$x := \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad y := \begin{pmatrix} 3.5 \\ 6.1 \\ 4.7 \\ 2.9 \\ 7.3 \\ 8.9 \end{pmatrix} \quad z := \begin{pmatrix} 12.9 \\ 34.2 \\ 98.0 \\ 21.7 \\ 43.4 \\ 45.8 \end{pmatrix}$$

Для сортування необхідно сформувати матрицю *M*, в якій перший стовпець складає вектор *X*, другий – вектор *Y*, третій – вектор *Z*.

Так як нам зручніше починати відлік з 1, введемо ORIGIN = 1

Подальша послідовність дій представлена нижче.

$$ORIGIN := 1$$

$$M^{\langle 1 \rangle} := x \qquad M^{\langle 2 \rangle} := y \qquad M^{\langle 3 \rangle} := z$$

$$M := \mathrm{csort}(M, 1)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4.7 & 98 \\ 2 & 8.9 & 45.8 \\ 3 & 7.3 & 43.4 \\ 4 & 2.9 & 21.7 \\ 5 & 3.5 & 12.9 \\ 6 & 6.1 & 34.2 \end{pmatrix}$$

Цифра 1 до функції **csort** означає, що сортування проводиться за першим стовпцем.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 9

Побудова законів розподілу у MathCad

У MathCad є цілий ряд вбудованих функцій, що дозволяють будувати закони розподілу випадкових величин. До них, зокрема, відносяться функції:

1. **dnorm (*x*, *μ*, *σ*)** – щільність ймовірності для нормального розподілу. тут x – випадкова величина, μ – її математичне очікування, σ – середньоквадратичне відхилення.

2. **dunif (*x*, *a*, *b*)** – рівномірна щільність ймовірності, де a, b – границі інтервалу розподілу.

3. **dt (*x*, *d*)** – щільність ймовірності для розподілу Стьюдента, де d – число ступенів свободи.

4. **dchisq (*x*, *d*)** – щільність розподілу **χ –** квадрат, де x – випадкова

величина, *d* – число ступенів свободи.

5. **dF (*x, d1, d2*)** – щільність ймовірності Фішера, де *x, d1, d2* – випадкова величина і дві ступені свободи, відповідно.

Всі вбудовані функції щільності ймовірностей у MathCad починаються з літери **d (Distribution)** – розподіл.

Нижче наводяться приклади обчислення і побудови графіків найбільш часто застосовуємих законів розподілу.

Завдання 1. За результатами спостережень побудувати графік нормального закону розподілу.

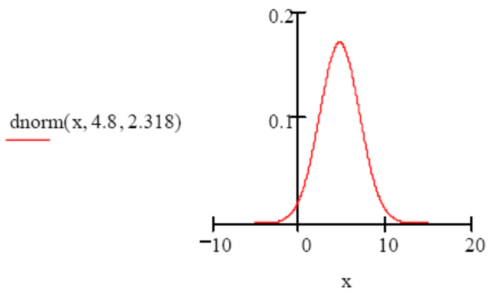
Вираз для нормального закону розподілу має вигляд,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

де m – математичне очікування, σ – середньоквадратичне (стандартне) відхилення випадкової величини x. Перш за все потрібно обчислити ці величини:

$$x := -5, -4.95 .. 15$$

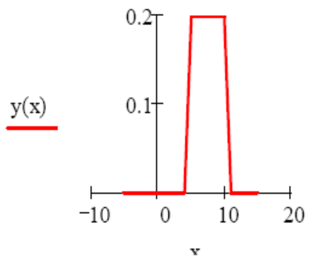
$$x := \begin{pmatrix} 6.4 \\ 7.6 \\ 2.3 \\ 1.8 \\ 5.9 \end{pmatrix} \qquad \text{mean}(x) = 4.8 \qquad \text{stdev}(x) = 2.318$$



Завдання 2. Побудувати рівномірний закон на інтервалі 10-20.

$$y(x) := \text{dunif}(x, 5, 10)$$

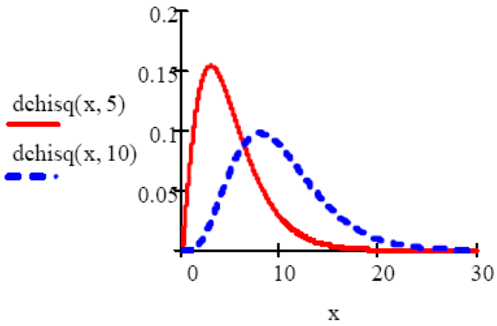
$$x := -5 .. 15$$



Завдання 3. Побудувати закон розподілу *xi*-квадрат.

Розподілом *xi*-квадрат з *d* ступенями свободи називається розподіл суми квадратів *d* незалежних випадкових величин, кожна з яких підпорядкована нормальному закону розподілу з математичним очікуванням, рівним нулю і дисперсією, що дорівнює одиниці. Аналітично це розподіл виражається через гамму – функцію. Закон розподілу *xi*-квадрат використовується в багатьох задачах математичної статистики. У MathCad цей закон будується за допомогою вбудованої функції **dchisq (x, d)**, де *x* – випадкова величина, *d* – число ступенів свободи. Побудова закону розподілу *xi*-квадрату для двох значень ступенів свободи:

x := 0, 0.01.. 30



Завдання 4. Побудувати самостійно закон розподілу *xi*-квадрат з 4-ма степенями свободи для $0 \le x \le 100$

Завдання 5. Побудувати закон z – розподілу Фішера.

Розподілом Фішера з *d1* та *d2* ступенями свободи називається розподіл F (χ), де

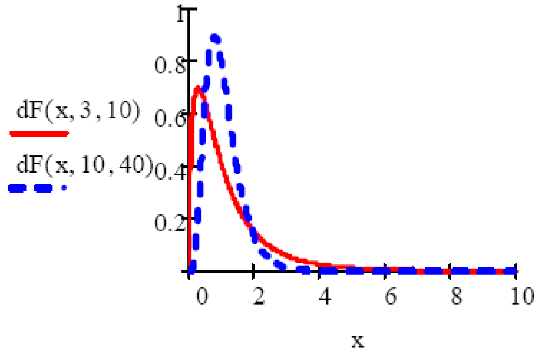
$$\chi = \frac{\sum_{i=1}^{d1} \xi_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{d2} \eta_i^{\,2}})$$

Тут ξ і η – незалежні, нормально розподілені випадкові величини з нульовим математичним очікуванням і дисперсією, яка дорівнює одиниці. Розподіл Фішера використовується в дисперсійному аналізі.

У MathCad розподіл Фішера будується за допомогою вбудованої функції **dF (*x, d1, d2*)**, де *x* – випадкова величина, а *d1* та *d2* – "ступені свободи".

Нижче побудова розподілу Фішера для кількох значень ступенів свободи.

x := 0, 0.1.. 10



Завдання 6. Побудувати у MathCad закон розподілу Стьюдента.

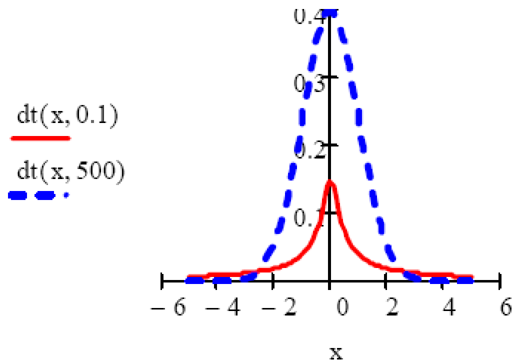
Розподілом Стьюдента або *t* – розподілом називається розподіл відносин:

$$t = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} \xi_i^{\ 2}}}$$

де *ξ, ξi* – незалежні, нормально розподілені випадкові величини з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією. Параметр *d* називають число ступенів свободи.

Розподіл Стьюдента широко використовується в дисперсійному аналізі. У MathCad розподіл Стьюдента будується вбудованою функцією **dt (*x, d*)**, де *x* – випадкова величина, а *d* – число ступенів свободи. Побудова закону розподілу Стьюдента:

x := −5, −4.9.. 10



Як відомо, функція або інтегральний закон розподілу *F(x)* показує вірогідність попадання випадкової величини *x* на відрізок осі абсцис (-∞, *x*). і математично записується як:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)$$

де *f(x)* – відповідна щільність ймовірностей.

У MathCad ці закони будуються за допомогою вбудованих функцій:

pnorm (*x*, *m*, *σ*) – інтегральний нормальний закон розподілу з математичним очікуванням *m* та середньоквадратичним відхиленням *σ*;

punif (*x*, *a*, *b*) – інтегральний рівномірний закон розподілу в межах *a* й *b*.

pchisq (*x*, *d*) – інтегральний закон розподілу *хі*-квадрат з *d* ступенями свободи;

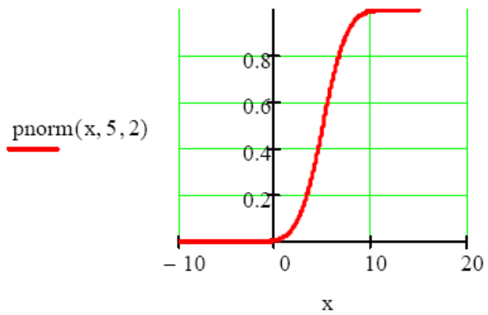
pF (*x*, *d1*, *d2*) – інтегральний закон розподілу Фішера зі ступенями свободи *d1* та *d2*.

pt (*x*, *d*) – інтегральний закон розподілу Стьюдента зі ступенем свободи *d*.

Завдання 7. Побудувати функцію розподілу для нормального закону з математичним очікуванням *m*=5 та середньоквадратичним відхиленням σ=2.

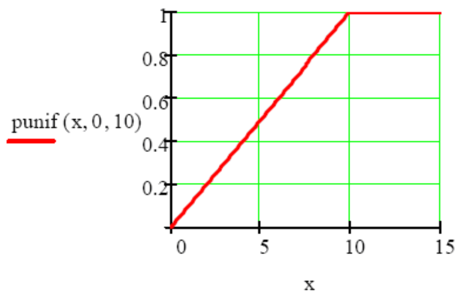
Побудова інтегрального закону рівномірного розподілу:

x := −10.. 15



Завдання 8. Побудувати функцію розподілу рівномірного закону в межах *a*=0, *b*=10. Функція має наступний вигляд:

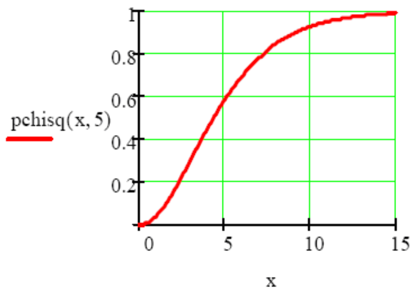
x := 0.. 16



Завдання 9. Побудувати функції розподілу для розподілів *хі*-квадрат, Фішера і Стьюдента.

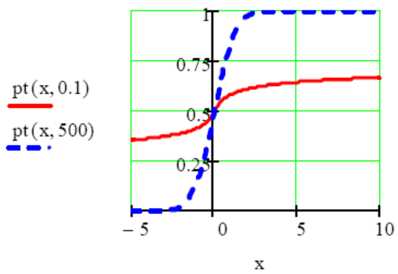
Функція розподілу *xi*-квадрату:

$x := 0, 0.5 .. 40$



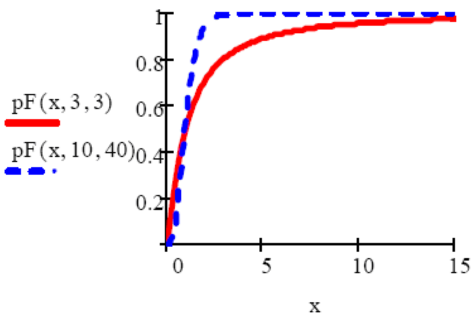
Функція розподілу Фішера:

$x := 0, 0.1 .. 10$



Функція розподілу Стьюдента:

$x := -5, -4.9 .. 10$



ВИСНОВОК

Одним з розділів математики, де використання математичного пакету MathCad особливо ефективне, є статистична обробка інформації. Особливістю статистичного аналізу даних є здійснення трудомістких розрахунків, використання функцій дуже складного виду, часто заданих таблично, потребу у побудові графіків. MathCad може стати дуже зручним інструментом як при вивченні теоретичного матеріалу, так і при розв’язуванні багатьох практичних задач у сфері фізичної культури і спорту.

У *першому розділі* описано інтерфейс робочого вікна та можливості інформаційно-довідкової системи пакету MathCad. *Другий розділ* присвячено вивченню засобів для формування та редагування MathCad-документів, методики та режимів виконання простих обчислень, описано операції з векторами та матрицями, роботу з математичними та логічними функціями у MathCad, а також описано функціональні можливості символьного процесора MathCad та особливості виконання символьних обчислень командами меню та символьними операторами. У *третьому розділі* подаються можливості та описано особливості розв'язування різних типів алгебричних та диференціальних рівнянь та їх систем у MathCad з ілюстрацією цих можливостей значною кількістю прикладів відповідно. У *четвертому розділі* детально розглянуто можливості побудови та форматування різних типів графіків. У *п’ятому розділі* представлено робота з виконанням процедур інтерполяції, апроксимації (регресії), екстраполяції та згладжування експериментальних даних засобами MathCad, описано і проілюстровано прикладами функціональні можливості генерування та статистичного опрацювання випадкових величин, також представлено можливості статистичного опрацювання безперервних випадкових величин. В той же час при розв’язку практичних задач у MathCad необхідно знати кілька числових параметрів, які дозволяють представити основні особливості випадкової величини у стислій формі у *шостому розділі* представлено числові характеристики випадкових величин.

Практикум складається з 9 практичних робіт. Тематика практичних робіт сформована, з одного боку, з умови максимально повного вивчення та засвоєння всіх основних обчислювальних та інших функціональних можливостей програмного забезпечення і, з іншого, набуття навичок у розв'язанні типових математичних задач, а саме: обчислення числовим та символьним способами похідних, визначених і невизначених інтегралів, сум, добутків та границь послідовностей і функцій, знаходження коренів нелінійних рівнянь, подаються задачі для символьного розв'язування, розв'язування систем лінійних та нелінійних рівнянь, розв'язування диференціальних рівнянь та дослідження функцій, опрацювання векторів та матриць, експериментальних даних, виконання інтегральних перетворень та розрахунків з використанням одиниць вимірювання фізичних величин з різними способами та формами візуалізації результатів обчислень. Пропонуються у практикумі також задачі для розв'язування задач математичної статистики та статистичного аналізу.

Математичний пакет MathCad має наступні особливості: простота у використанні і легкість у навчанні. Більшість дій, необхідних для управління програмою, є інтуїтивно прозорими. На освоєння її можливостей користувачу, що працював раніше в середовищі Windows, потрібно небагато часу. Застосування бібліотек і пакетів розширення забезпечує професійну орієнтацію MathCad на будь-яку область науки, техніки і освіти. Крім звичних чисельних розрахунків система здатна робити символьні перетворення: широкі графічні можливості. Велика кількість типів графіків та наявність текстового редактору. MathCad дозволяє розв’язувати складні оформлювальні задачі, що важко даються популярним текстовим редакторам або електронним таблицям. Використовуючи MathCad можна, наприклад, готувати статті, книги, дисертації, наукові звіти, дипломні і курсові проекти, магістерські та кваліфікаційні роботи, супроводжуючи їх не лише якісними текстами, але і з легко здійснюваним набором найскладніших математичних формул, вишуканим графічним представленням результатів обчислень і численними ″живими″ прикладами.

Таким чином, пакет застосування математичного процесору MathCad дає змогу провести об’єктивну обробку інформації та дозволяє представити статистичні дані з наглядним графічним представленням результатів дослідження, а також отримати обґрунтовані рекомендації для рішення професійно орієнтовних задач.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ашанин В.С. Введение в математические основы анализа числовых и графических экспериментальных даних / В.С. Ашанин, С.С. Пятисоцкая. Учебное пособие. – Харьков: ХГАФК, 2013. – 60 с.

2. Ашанин В.С. Теоретические основы многомерных методов анализа в задачах физического воспитания и спорта : [учебное пособие] / В.С. Ашанин, С.С. Пятисоцкая. – Серия: Библиотека магистранта и аспиранта: «Многомерные методы анализа данных». – Выпуск 2. – Х.: ХДАФК, 2015. – 88 с.

3. Ашанін В.С. Математичні основи спортивної інформатики: [навчальний посібник] / В.С. Ашанін, М.А. Кузьменко. – Харків: ХДАФК, 2006. – 96 с.

4. Бидасюк Ю.М. Mathcad для студента / Ю.М. Бидасюк. – М. : Вильямс, 2006. – 224 с.

5. Бородай В.А. Методичні вказівки до виконання лабораторних та самостійних робіт з дисципліни "Обчислювальна техніка в розрахунках електромеханічних систем" (пакет MathCAD) для студентів напряму 0922 Електромеханіка / Упоряди.: В.А. Бородай, В.Е. Воскобойник. – Дніпропетровськ: Національний гірничий університет, 2003. – 64 с.

6. Булашенко А.В. Інформатика: конспект лекцій у чотирьох частинах. – Частина 4: Обробка інженерної інформації за допомогою математичного пакета MathCAD / Укладач А.В. Булашенко. – Суми: Вид-во СумДУ, 2010 – 123 с.

7. Васильев А.Н. Mathcad 13 на примерах / А.Н. Васильев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.: ил.

8. Великий О.А. Комп'ютерні технології [Текст]: методичні вказівки до практичних занять для студентів напрямку 6.05050206 «Інженерна механіка» денної форми навчання / уклад. О.А. Великий. – Луцьк: Луцький НТУ, 2016. – 60 с.

9. Гурский Д.А. Вычисления MathCad 12 / Д.А. Гурский, Е.А. Турбина. – СПб.: Питер, 2006. – 546 с.

10. Гурский Д.А. MathCad для студентов и школьников. Популярный самоучитель / Д.А. Гурский, Е.А. Турбина. – СПб. : БВХ-Петербург, 2005.– 40 с.

11. Данилин Г.А. Математические методы с Mathcad: Учебное пособие: Лабораторный практикум для студентов всех специальностей / Г.А. Данилин, П.А. Курзин, В.М. Курзина // М.: МГУЛ, 2003. – 152 с.

12. Дьяконов В. П. Mathcad 8-12 для всех / В.П. Дьяконов. – М.: Солон-Пресс, 2005. – 632 с.

13. Дьячкова О.В. Сучасні інформаційні технології в економіці. Бізнес аналіз даних засобами MathCAD: [Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.] / О.В. Дьячкова, С.Б. Данилевич; Нар. укр. акад. – Х.: Вид-во НУА, 2006. – 171 с.

14. Жуков М.Н. Методичні рекомендації до навчального курсу інформатика / М.Н. Жуков. – Київ, 2009. – 75 с.

15. Жукова В.М. Комп’ютери в інженерних та наукових розрахунках: навч. посіб. до вивчення дисц. для студ. спец. 6.030102 – „Інформатика” / В.М. Жукова, В.М. Шишлакова, М.Я. Тетерева; Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка”. – Луганськ : ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2011. – 220 с.

16. Ивановский Р. Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad / Р.Ивановский. – М. : БХВ-Петербург, 2008. – 528 с.

17. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем MatCAD 7.0 Pro, MatCAD 8.0 Pro, MatCAD 2000 Pro: учеб. пособие / Р.И. Ивановский. – СПб.: Из-во СПбГТУ.

18. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 13 / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.

19. Макаров Е.Г. MathCad: Учебный курс / Е.Г.Макаров . – СПб.: Питер, 2009. – 384 с.: ил.

20. Манакова Н.О. Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Інформаційні технології і бази даних» (для студентів 3 курсу

денної форми навчання спеціальності 6.092100 – «Міське будівництво та господарство»), Ч.1 «MathCAD» Укл.: Н.О. Манакова, О.Б. Костенко, Н.В. Макогон, А.А. Євдокімов. – Харків: ХНАМГ, 2007. – 32 с.

21. Мелешко Т.В. Основи проектування електронних систем: лабораторний практикум / Уклад.: Т.В. Мелешко, В.А. Швець, А.О. Краснопольский, Н.О. Касперович, О.О. Туз. – К.: НАУ, 2014.– К.:НАУ, 2014. – 102 с.

22. Охорзин В.А. Компьютерное моделирование в системеMathcad / В.А. Охорзин. – М. : Финансы и статистика, 2006. – 144 с.

23. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD / В.А.Охорзин // Учебное пособие. 3-е изд. – СПб.: Лань, 2009. –352 с.

24. Очков В.Ф. MatCAD 7.0 Pro для студентов и инженеров / В.Ф. Очков. – М.: Компьютер Пресс, 1998. – 380с.

25. Очков В.Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия / В. Ф. Очков. – СПб.: BHV, 2009. – 512 с.

26. Половко А.М. Mathcad для студента / А.М. Половко, И.В. Ганичев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. –336 с.

27. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета MathCad. – М.: Горячая линия. – Телеком, 2002. – 252 с.

28. Семененко М. Математическое моделирование в MathCad / М.Семененко. – Альтекс. 2003. – 208 с.

29. Струтинській В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: підручник / В.Б. Струтинській. – Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612 с.

30. Толстых В.К. Программирование в среде MathCAD: учеб.-метод. Пособие для бакалавров инженерных и физических специальностей / сост. В.К. Толстых. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 128 с.: ил.

31. Херхагер М. Mathcad 2000: полное руководство / М. Херхагер, М. Партоль // «Ирина», BHV, Киев, 2000. – 414 с.

32. Черняк А.А. Математика для экономистов на базе Mathcad / А.А. Черняк. – СПб.: BHV, 2016. – 496 с.

33. Яньков В.Ю. Лабораторный практикум по моделированию в пакете Mathcad. Модуль 1: Основы работы в Mathcad / В.Ю. Яньков, Н.А.Якушина. – М.: МГУТУ, 2009. – 36 с.

Додаток А

Послідовності набору клавіш і відповідні математичні формули на екрані

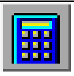
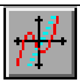
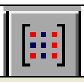
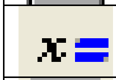
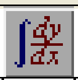
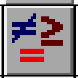
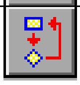
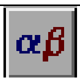
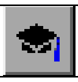
Операція	**Позначен-ня**	**Клавіші**	**Призначення**
Додавання	x+y	+	Додавання скалярів, векторів або матриць
Віднімання	x-y	-	Віднімання скалярів, векторів або матриць
Множення	$X \cdot У$	*	Обчислення добутку X на У, якщо X і У – скаляри. Обчислення скалярного добутку, якщо X і У – вектори. Множення матриць, якщо X і У – погоджені матриці
Ділення	X/z	/	Ділення виразу X на скаляр z, який не дорівнює нулеві
Піднесення в ступінь	Z^w	^	Підносить Z у ступінь w
Квадратний корінь	$\sqrt{Z}$	\	Обчислення квадратного кореня з Z
Корінь n-го ступеня	$\sqrt[n]{Z}$	[Ctrl]\	Обчислення кореня ступеня n з Z
Круглі дужки	(X)	‘	Зміна пріоритету виконання операцій
Нижній індекс	A_n	[	Завдання індексованої змінної
Верхній індекс	$A^{<n>}$	[Ctrl]6	Вибір n-го стовпця з масиву А
Модуль комплексного числа	$\lvert z \rvert$	¦	Обчислення модуля комплексного числа z
Векторизація	$\vec{X}$	[Ctrl]-	Виконання операції для всіх елементів X
Транспонування	A^T	[Ctrl]1	Транспонування матриці A
Матриця в ступені	M^n	^	Піднесення до n-го ступеня квадратної матриці M
Сума вектора	$\sum v$	[Ctrl]4	Сума елементів вектора v
Розмір вектора	$\lvert v \rvert$	¦	$\sqrt{v * v}$, якщо всі елементи v-дійсні
Детермінант матриці	$\lvert M \rvert$	¦	Обчислення визначника квадратної матриці M
Сума ряду	$\sum_{i=k}^{n} X$	[Ctrl] [Shift]4	Обчислення суми X для i=k,k+1,…,n причому X може бути будь-яким виразом
Добуток ряду	$\prod_{i=k}^{n} X$	[Ctrl] [Shift]3	Обчислення добутку X для i=k,k+1,…,n причому X може бути будь-яким виразом
Сума нескінченногоряду	$\sum_{i} X$	$	Обчислення суми нескінченного числа членів X
Добуток нескінченного ряду	$\prod_{i} X$	#	Обчислення добутку нескінченного числа членів X
Визначений інтеграл	$\int_a^b f(x)dx$	&	Обчислення визначеного інтеграла від функції f(x) на інтервалі [a,b]
Невизначений інтеграл	$\int f(x)dx$	[Ctrl]I	Знаходження в символьному виді невизначеного інтеграла від функції f(x)
Похідна	$\frac{d}{dx} f(x)$	?	Обчислення першої похідної функції f(x) по змінній x
Похідна n-го порядку	$\frac{d^n}{dx^n} f(x)$	[Ctrl]?	Обчислення n-ої похідної функції f(x) по змінній x

Продовження додатку А

Границя	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	[Ctrl]L	Обчислення границі функції f(x) при x прагнучому до a
Границя функції праворуч	$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$	[Ctrl]A	Обчислення границі функції f(x) при x прагнучому до a праворуч
Границя функції ліворуч	$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$	[Ctrl]B	Обчислення границі функції f(x) при x прагнучому до a ліворуч
Перенос на інший рядок	X……+У	[Ctrl][↵]	Завдання переносу частини виразу на наступний рядок
Більше	x>y	>	1, якщо x>y, інакше 0
Менше	x<y	<	Повернення 1, якщо x<y, інакше 0
Більше або дорівнює	x≥y	[Ctrl]0	Повернення 1, якщо x≥y , інакше 0
Менше або дорівнює	x≤y	[Ctrl]9	Повернення 1, якщо x≤y, інакше 0
Не дорівнює	z≠w	[Ctrl]3	Повернення 1, якщо z≠w, інакше 0
Дорівнює	z=w	[Ctrl]=	Повернення 1, якщо z=w, інакше 0

Додаток Б

Склад панелі інструментів Математика

Значок	**Назва**	**Виконувана дія**
	Панель калькулятор	Вставка шаблонів загальних математичних операцій, цифр, знаків арифметичних операцій
	Панель графики	Дозволяє створювати графіки та вставляти шаблони графіків
	Панель векторов и матрицы	Вставка шаблонів векторів та матриць та операцій над ними
	Панель оценки	Панель присвоєння значень та виводу результатів розрахунків
	Панель исчислений	Вставка шаблонів диференціювання, інтегрування та додавання
	Булевая панель	Вставка логічних операторів
	Панель программирования	Операторі, що необхідні для створення програмних модулів
	Панель греческих символов	Панель, що дозволяє вставляти грецькі літери
	Панель символических кодовых слов	Вставка операторів символьного числення

Додаток В

Призначення деяких кнопок панелі інструментів Калькулятор

Кнопка	Назва	Виконувана дія
$\sqrt{\ }$	Квадратный корень	Для введення квадратного кореня
$\sqrt[n]{\ }$	Энный корень	Для введення кореня n-го порядку
$\lvert x \rvert$	Абсолютное значение	Бере модуль числа
:=	Присвоить	Виконує операцію присвоєння функції
=	Равно	Використовується для виведення на екран значення
m..n	Переменная диапазона	Означає присвоєння змінній зліва ряду послідовних
( )	Круглые скобки	Відповідає виразу, взятому в дужки
x_n	Нижний индекс	Забезпечує визначення елементів індексної змінної
.	Десятичная точка	Забезпечує розділення цілої та дробової частини числа
e^x	Экспонента	Використовується для взяття експоненти до степеня
ln	Натуральный логарифм	Використовується для обчислення натурального
x^{-1}	Инверсия	Використовується для розрахунку інверсного значення
n!	Факториал	Використовується для розрахунку факторіала
log	Логарифм	Використовується для розрахунку логарифма
π	Пи	Використовується для виведення числа π, яке також можна вивести за допомогою комбінації клавіш
x^Y	Возведение в степень	Використовується для взяття деякого числа в довільний степінь, чого також можна досягти за рахунок використання комбінації клавіш Shift+^
tan cos sin	Тангенс, косинус, синус	Використовуються для розрахунку тригонометричних
+ − × /	Прибавление, вычитание, умножение, деление	Використовуються для виконання арифметичних операцій

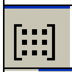
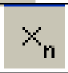
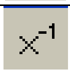
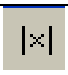
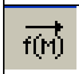
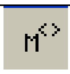
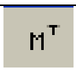
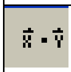
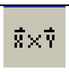
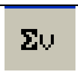
Додаток Г

Призначення кнопок панелі Исчислений

Кнопка	Назва	Операція
$\frac{d}{dx}$	Производная 1-го порядка	Використовується для обчислення похідної 1-го порядку
$\frac{d^n}{dx^n}$	Производная n-го порядка	Використовується для обчислення похідної n-го порядку
∞	Бесконечность	Використовується для завдання нескінченності
$\int_a^b$	Определенный интеграл	Використовується для обчислення визначеного інтегралу
$\sum_{n=1}^{m}$	Суммирование	Додавання діапазону чисел
$\prod_{n=1}^{m}$	Произведение	Добуток діапазону чисел
$\int$	Неопределенный интеграл	Використовується для обчислення невизначеного інтеграла
$\sum_n$	Суммирование переменной диапазона	Використовується для додавання ранжованого діапазону
$\prod_n$	Произведение переменной диапазона	Використовується для добутку ранжованого діапазону
$\lim_{\to a}$	Двусторонний предел	Використовується для обчислення границь функцій
$\lim_{\to a^+}$	Верхний придел	Використовується для обчислення верхньої границі функції
$\lim_{\to a^-}$	Нижний придел	Використовується для обчислення нижньої границі функції

Додаток Д

Призначення кнопок панелі Матриця

Кнопка	**Назва**	**Призначення**	**Комбінація**
	Матрица	Використовують для завдання розміру матриці	Ctrl+M
	Нижний индекс	Використовують для завдання нижнього індексу	[
	Инверсия	Використовують для обчислення інверсного значення	
	Эпитоп	Використовують для обчислення визначника матриці або модуля вектора	
	Векторизация	Перетворення величини на векторну	Ctrl+-
	Матричный столбец	Використовують для виділення матричного стовпця з матриці	Ctrl+6
	Транспонация матрицы	Використовують для здійснення операції транспонування матриці	Ctrl+1
	Переменная диапазона	Використовують для завдання границь діапазону ранжованої змінної	;
	Скалярное произведение	Використовують для скалярного добутку	*
	Векторное произведение	Використовують для матричного (векторного) добутку	Ctrl+8
	Векторная сумма	Використовують для знаходження векторної суми	Ctrl+4
	Рисунок	Використовують для впровадження рисунка формату .bmp в документ програми	Ctrl+T

Додаток Е

Призначення кнопок Булевая панель

Кнопка	**Назва**	**Призначення**	**Комбінація клавіш**
=	Равно	Логічна операція дорівнює	Ctrl+
<	Меньше чем	Логічні операції порівняння операторів	<
>	Больше чем		>
≤	Меньше чем или равно		Ctrl+9
≥	Больше чем или равно		Ctrl+0
≠	Не равно	Логічна операція не дорівнює	Ctrl+3
¬	Не	Логічна операція заперечення, яка інвертує будь-яку логічну дію	Ctrl+Shift+1
∧	И	Логічна операція И, яка повертає значення Істина, коли всі вирази виконуються або	Ctrl+Shift+7
∨	Или	Логічна операція ИЛИ, яка повертає значення Істина, коли виконується хоча б один з виразів або один вираз приймає	Ctrl+Shift+6
⊕	Эксключив	Логічна операція, яка повертає 1, якщо хоча б один з виразів, але не обидва	Ctrl+Shift+5

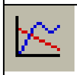
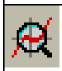
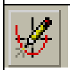
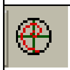
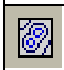
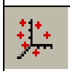
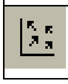
Додаток Є

Призначення кнопок панелі Оценка

Кнопка	Назва	Призначення	Комбінація клавіш
=	Численно равно	Використовується при рівності	=
:=	Определение	Використовується для присвоєння значення однієї змінної значення іншої	:
≡	Глобальное определение	Використовується для глобального визначення змінної	Shift+~
→	Значение символической величины	Використовується для одержання результату обчислень символьної величини	Ctrl+.
▪→	Символическая оценка	Використовується для оцінки результатів обчислення символьної величини	Ctrl+Shift+.
f x	Оператор перед	Використовується, коли оператор діє зліва	
x f	Оператор после	Використовується, коли оператор діє справа	
xfy	Оператор внутри	Використовується, коли оператор діє всередині	
$x^f y$	Оператор дерево	Використовується, коли оператор у вигляді дерева	

Додаток Ж

Призначення панелі інструментів Графики

Кнопка	Назва	Виконувана дія
	График	Використовується для побудови двомірних графіків
	Масштаб	Використовують для збільшення або зменшення масштабів
	Слежение	Використовується для пошуку координат графіків
	Полярный график	Використовується для побудови полярних графіків
	Поверхностный график	Використовується для побудови поверхневих графіків
	Контурный график	Використовується для побудови контурних графіків
	Трехмерный график гистограммы	Використовується для побудови графіка у вигляді діаграми
	Трехмерный график множества	Використовується для побудови трьохвимірного графіка у вигляді розподілу точок
	Трехмерный векторный график	Використовується для побудови трьохвимірного графіка векторного поля

Додаток 3

Позначення основних функцій у діалоговому вікні Insert Function (Вставка функції)

Функції	Ім'я вводу вручну
Тригонометрічні і обернені	sin(z), cos(z), tan(z), asin(z), acos(z), atan(z), z – кут в радіанах
Гіперболічні і обернені	sinh(z), cosh(z), tanh(z), asinh(z), acosh(z), atanh(z)
Експоненціальні і логарифмічні	exp(z) – ez ln(z) – натуральний логарифм log(z) – десятковий логарифм
Статистичні	mean(x) – середнє значення var(x) – дисперсія stdev(x) – середньоквадратичне відхилення cnorm(x) – функція нормального розподілу erf(x) – функція помилки Г(x) – гамма-функція Ейлера
Функції Бесселя	J0(x), J1(x), Jn(n,x) – функції Бесселя першого порядку Y0(x), Y1(x), Yn(n,x) – функції Бесселя другого порядку
Функції комплексної змінної	Re(z) – дійсна частина комплексного числа Im(z) – уявна частина комплексного числа arg(z) – аргумент комплексного числа
Перетворення Фур'є	U:=fft(V) – пряме перетворення (V-дійсне) V:=ifft(U) – зворотне перетворення (V-дійсне) U:=cfft(V) – пряме перетворення (V-комплексне) V:=icfft(U) – зворотне перетворення (V-комплексне)
Кореляційна функція (дозволяє розраховувати коефіцієнт кореляції двох векторів vx і vy і визначити рівняння лінійної регресії)	corr(vx,vy) – коефіцієнт кореляції slope(vx,vy) – коефіцієнт нахилу лінії регресії intercept(vx,vy) – початкова координата лінії регресії
Лінійна інтерполяція	linterp(vx,vy,x) vx,vy – вектори значень аргументу і функцій. x – значення аргументу для якого проводитися інтерполяція.
Функція для визначення кореня рівнянь алгебри і трансцендентних	root(рівняння, змінна) – значення змінної, коли рівняння рівне нулю
Датчик випадкових чисел	rnd(x) – випадкове число з рівномірним розподілом від 0 до x
Ціла частина змінної	floor(x) – найближче найменше ціле число ceil(x) – найближче найбільше ціле число
Виділення залишку	mod(x,y) – залишок від ділення x на y
Зупинка ітерації	until(x,y) – коли x<0
Функція умовного переходу	if(умова,x,y) – якщо умова виконується, то функція дорівнює x інакше y
Одинична функція (функція Хевісайда)	Ф(x) – якщо x>0. То функція рівна 1 інакше 0
Логічні вирази і операції (Простими видами логічних виразів є наступні: логічна константа, логічна змінна, вираз відношення. Наприклад, при x:=0.5 операції відношення привласнюють L істину або хибність (1 або 0))	L := xJ1 L=0 L := xi1 L=0 L := x»1 L=0 L := x<1 L=1 L := x>1 L=0

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ MATHCAD В ЗАДАЧАХ ФІЗИЧНОГО ВИХОВАННЯ ТА СПОРТУ

Навчальний посібник

Ашанін Володимир Семенович
Пасько Владлена Віталіївна