ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ФИЗИЧЕСКОЙ
КУЛЬТУРЫ

Баранова З.М., Зациорский В.М.,
Петросян А.Н.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ "СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ"

Методические разработки для студентов
институтов физической культуры

Москва - 1980

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ

Баранова З.М., Зациорский В.М., Петросян А.Н.

Утверждены
Ученым советом ГЦОЛИФКа

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ "СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ"

Методические разработки для студентов институтов физической культуры

Москва - 1980

I. Генеральная и выборочная совокупность

Для того, чтобы правильно изучить и оценить всю статистическую совокупность объектов относительно какого-либо качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты, необходимо рассмотреть весь состав совокупности, т.е. провести сплошное обследование каждого из объектов совокупности относительно признака, которым мы интересуемся. Но на практике сплошное обследование проводится редко, так как в силу ряда причин, по которым сплошное обследование физически либо невозможно проводить, либо нецелесообразно. Из этих причин наиболее существенны следующие:

I. Совокупность содержит очень большое количество объектов.

2. Экономия времени и средств при обследовании.

3. Достижение большей точности результатов обследования благодаря сокращению ошибок, происходящих при регистрации.

Все указанные выше причины приводят к тому, что о большой совокупности исследуемых объектов приходится судить по какой-то ее части. В таких случаях из всей совокупности объектов случайно отбирают ограниченное число объектов и подверга т их изучению, в связи с чем исследователь всегда имеет дело с двумя совокупностями, которые называются соответственно выборочной и генеральной.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, объединенных каким-нибудь признаком.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называют совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Число объектов в любой совокупности называется объемом (объем генеральной совокупности обозначается N, а объем выборки n).

Сущность выборочного метода в том, чтобы по свойствам части (выборки) судить о целом (генеральной совокупности).

Практика показала, что правильно организованная выборка хорошо представляет генеральную совокупность, однако полного совпадения выборочных данных и данных по генеральной совокупности не бывает (в этом недостаток выборочного метода).

Для выборок можно рассчитать все числовые характеристики, которые называют еще статистиками, значения числовых характеристик генеральной совокупности называют параметрами. Принято обозначать статистики латинскими буквами, а параметры - греческими.

Символ $\bar{x}$ принят для выборочного среднего, а греческая буква μ для генерального среднего, S^2 - дисперсия выборочная, σ^2 - дисперсия генеральная и т.д.

Статистику, вычисленную по выборке, можно рассматривать как оценку параметра.

Ввиду неполного отображения выборкой статистических параметров генеральной совокупности ставится задача: учитывать условия, при которых выборка репрезентативна (т.е. правильно представляет генеральную совокупность) и в каждом конкретном случае устанавливать, с какой уверенностью можно по выборочным данным судить о данных генеральной совокупности.

Выборка будет репрезентативной, если ее осуществляют случайно и если все объекты имеют одинаковую вероятность попадания в выборку.

Отклонения выборочных показателей от их параметров в генеральной совокупности, которая обычно мыслится как совокупность неограниченно большого объема, называются ошибками репрезентативности. Эти ошибки возникают в силу того, что выборочная совокупность недостаточно точно представляет генеральную совокупность. Ошибки, допускаемые при измерении объектов, выборочные ошибки могут быть случайными и систематическими. Первые возникают независимо от воли естествоиспытателя, вторые являются следствием несоблюдения условий репрезентативности при образовании выборочной совокупности или какой-нибудь другой определенной причины. Систематические ошибки исчезают с устранением вызывающих их причин, главным образом при соблюдении принципа случайного отбора. Случайные ошибки репрезентативности остаются и должны учитываться при оценке генеральных параметров по данным выборочного наблюдения.
При сплошном (т.е. невыборочном) изучении генеральной сово-

купности ошибки репрезентативности не имеют места.

П. Средние ошибки статистик

Представим, что из одной и той же совокупности, распределяемой по нормальному закону, отобрано повторным случайным способом какое-то количество независимых выборок. Очевидно, выборочные средние ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$), характеризующие эти выборки как величины случайные, будут варьировать вокруг одного и того же центра распределения генеральной средней (M), которая является величиной постоянной.

Спрашивается, какова величина этой вариации и как ее измерить?

Известно, что основным мерилом вариации служит дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Эти же показатели характеризуют и варьирование выборочных средних. В математической статистике доказывается, что выборочные средние варьируют в раз меньше, чем отдельные варианты одной и той же генеральной совокупности. Отсюда следует, что среднее квадратическое отклонение, характеризующее варьирование выборочных средних вокруг их генерального параметра равняется:

$$m_{\bar{x}} = \pm S/\sqrt{n} \quad \text{или} \quad m_{\bar{x}} = \pm \sigma_x/\sqrt{n}$$

$$m_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2 n_i}{n(n-1)}}\,; \quad \text{при } n < 100.$$

$$m_{\bar{x}} = \pm \sqrt{S^2/n}\,; \quad \text{при } n > 100.$$

Обычно этот показатель называют выборочной ошибкой средней $m_{\bar{x}}$ или ошибкой репрезентативности. В дальнейшем ошибки обозначаются буквой m, которая сопровождается символом того показателя, к которому относится ошибка. Так как в формулу выборочной ошибки входит не генеральная, а выборочная дисперсия, то более точной будет формула ошибки, в которой n заменяется на $n-1$, т.е. на число степеней свободы.

Чем больше объем выборки, тем точнее средний результат, тем меньше выборочная средняя будет отличаться от средней генеральной совокупности. Следовательно, при увеличении числа испытаний ошибка выборочной средней будет уменьшаться, т.е. при $n \to \infty$; $m_{\bar{x}} \to 0$.

Напомним основные формулы подсчета средних ошибок основных статистик выборок:

1. Средняя ошибка m_{Me} медианы

$$m_{Me} = 1.2533 \cdot \sigma / \sqrt{n}.$$

2. Средняя ошибка m_v коэффициента вариации

$$m_v = v / \sqrt{2n} \quad \text{или} \quad m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 + 2\left(\frac{v}{100\%}\right)};$$

3. Средняя ошибка среднего квадратического отклонения σ

$$m_\sigma = \sigma / \sqrt{2n}$$

4. Средняя ошибка коэффициента корреляции r_{xy}.

$$m_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}; \quad m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}}, \text{ при } n < 30$$

5. Средняя ошибка коэффициента корреляции рангов r_s

$$m_{r_s} = \frac{1 - r_s^2}{\sqrt{n - 1}};$$

6. Средняя ошибка корреляционного отношения η

$$m_\eta = \frac{1 - \eta^2}{\sqrt{n}}; \quad m_\eta = \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{n - 2}}, \ (n < 30)$$

7. Средняя ошибка коэффициентов регрессии:

$$m_{b_{y/x}} = \sigma_y / \sigma_x \cdot \sqrt{1 - r^2 / n - 2};$$

$$m_{b_{x/y}} = \sigma_x / \sigma_y \cdot \sqrt{1 - r^2 / n - 2};$$

III. Статистическая проверка гипотез

Почти всегда при выборочном методе параметры и законы распределения генеральной совокупности остаются неизвестными и судят о них по выборочным данным, т.е. всегда приходится делать предположения о том, что параметры генеральной совокупности совпадают с полученными статистиками выборок, или, например, о равенстве параметров двух или нескольких распределений, о независимости выборок и др. Все подобные предположения принято называть гипотезами.

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Например, статистическими будут следующие гипотезы:

1) генеральная совокупность распределена по нормальному закону, по закону Пуассона и т.д.;

2) дисперсии двух нормально распределенных совокупностей равны между собой;

3) о равенстве двух средних;

4) относится ли та или иная варианта к данной статистической совокупности;

5) соответствует ли данное эмпирическое распределение тому или иному теоретическому распределению;

6) являются ли данные эмпирической совокупности выборками из одной и той же генеральной совокупности, в том случае, если варианты далеко отстоят от среднего значения, не принадлежат ли они к другой генеральной совокупности.

Гипотеза "26 марта 1982 года не будет дождя" не является статистической гипотезой, т.к. в ней не идет речь ни о виде, ни о параметрах распределения.

Вопрос проверки гипотез сводится к тому, чтобы определить, является ли расхождение между генеральной совокупностью и выборочной случайностью или это проявление действия определенного фактора, какого-то реального различия.

Выдвигаемая гипотеза может оказаться неправильной, поэтому наряду с ней рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Если выдвинутая гипотеза будет отвергнута, то принимается противоречащая ей. Эти две гипотезы строго различают.

Выдвигаемую гипотезу называют нулевой (основной), обозначают H_0 ; гипотезу ей противоречащую называют альтернативной (конкурирующей) и обозначают H_1.

Правила, позволяющие отвергнуть или принять нулевую гипотезу H_0 на основании данных выборки, называются критериями проверки статистической гипотезы.

Каждый критерий определяет критическую область, и если выборка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежит к критической области, то нулевая гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная H_1 ; критическая область отделяется от некритической так называемой критической точкой; числовые значения критических точек вычислены для каждого критерия и находятся по соответствующим таблицам, помещенным в книгах по статистике.

Такое принятие гипотезы не говорит о том, что данная гипотеза правильна, т.к. при подобной проверке нет логического обоснования ее правильности, и поэтому могут возникнуть следующие случаи:

1) гипотеза H_0 - верна и принимается согласно критерию;
2) гипотеза H_0 - неверна и отвергается согласно критерию;
3) гипотеза H_0 - верна, но отвергается согласно критерию (ошибка первого рода);
4) гипотеза H_0 - неверна, но принимается согласно критерию (ошибка второго рода).

Вероятность отвергнуть верную гипотезу H_0 называется ($P(\bar{H}_0) = \alpha$) <u>уровнем значимости</u> (т.е. это вероятность совершить ошибку первого рода). Наиболее часто уровень значимости принимается равным 0,05, 0,001 или 0,01; т.е. если α = 0,05, то это означает, что в 5 случаях из ста мы рискуем допустить ошибку первого рода (отвергнуть правильную гипотезу). Вероятность принять верную (истинную) гипотезу называется <u>доверительной вероятностью</u>.

$$P(+H_0) = 1 - \alpha$$

Эту вероятность принято брать очень большой: 0,95, 0,99, 0,999. Вероятность того, что H_0 будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза H_1, называется мощностью критерия, т.е. это вероятность не допустить ошибку второго рода.

$$P(-H_0) = \beta$$

Вероятности α и β часто рассматриваются как риск принять неправильные решения, поэтому одной из целей проверки гипотез является построение критерия, для которого и α, и β были бы малы. В большинстве случаев устанавливается некоторое заранее определенное значение α и правило принятия решения формулируется таким образом, чтобы минимизировать β.

Значения уровня значимости α необходимы, чтобы определять критические точки по таблицам.

Если не рассматривать сложный математический аппарат получения значений критических точек, то можно просто изложить основные практические принципы проверки гипотез с помощью критериев следующим образом: вычисляются два значения - 1) критическое, которое находится по соответствующим таблицам критических точек, и 2) наблюдаемое - по данным выборки по соответствующей формуле (для различных гипотез - разные формулы); эти два значения сравниваются между собой и в зависимости от того, какое из них больше, нулевая гипотеза либо принимается, либо отвергается.

IУ. Доверительный интервал

Статистическая ошибка получается за счет различия между выборочной и генеральной совокупностями. Величина ошибки выборочной средней определяется по разности между средней выборочной совокупности ($\bar{X}$) и средней генеральной совокупности $\mathcal{M}$ т.е. как $|\bar{x} - \mathcal{M}|$. Чем меньше будет эта разность $|\bar{x} - \mathcal{M}| < \delta$, тем точнее $\bar{x}$ будет определять среднее генеральной совокупности $\mathcal{M}$, следовательно, число δ характеризует точность оценки. Однако статистические методы позволяют говорить лишь о вероятности P, о которой неравенство $|\bar{x} - \mathcal{M}| < \delta$ осуществляется:

$$P(|\bar{x} - \mathcal{M}| < \delta) = \gamma \qquad (*)$$

Вероятность γ называют надежностью оценки или доверительной вероятностью.

Преобразовав выражение (*) получим:

$$P([\bar{x} - \delta] \le \mathcal{M} \le [\bar{x} + \delta]) = \gamma$$

Таким образом, получили интервал $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ который заключает в себе оценку $\mathcal{M}$, с вероятностью P.

Интервал, в котором с заданной вероятностью P находится среднее значение генеральной совокупности $\mathcal{M}$ называют доверительным интервалом, а его концы - доверительными границами.

Значение точности оценки δ принято брать равным $t \cdot m_{\bar{x}}$ или $t \cdot \sigma/\sqrt{n}$, где $t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$ (нормированное отклонение).

Доверительный интервал для оценки среднего генеральной совокупности определяется формулой:

$$\bar{x} - t m_{\bar{x}} \le \mathcal{M} \le \bar{x} + t m_{\bar{x}}$$

или

$$\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} \le \mathcal{M} \le \bar{x} + t \cdot \sigma/\sqrt{n}.$$

Доверительная вероятность γ выбирается равной P, Р = 0,95, Р=0,99, Р = 0,999, что соответствует 0,05, 0,01, 0,001 уровню значимости α.

Для данной доверительной вероятности значение t определяется из таблиц Стьюдента. При больших выборках значение определяется из таблицы нормального интеграла вероятности.

У. Оценка достоверности различия средних двух выборочных совокупностей (большие независимые выборки)

В исследовательских работах часто бывает необходимо сравнивать средние арифметические двух совокупностей, например, сравнение показателей спортсменов, тренирующихся по новому методу с результатами спортсменов, занимающихся по ранее применяемому методу; сравнение результатов спортсменов, тренирующихся в контрольной и опытной группах; сравнение результатов, показанных в разных соревнованиях и т.д.

Если между сравниваемыми группами имеется разница, то необходимо выяснить, является ли эта разница закономерным явлением или результатом случайности. Для ответа на эти вопросы пользуются критерием достоверности Стьюдента. Наблюдаемое значение критерия вычисляется по формуле:

$$t_{н.} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{m^2_{\bar{x}_1} + m^2_{\bar{x}_2}}}$$

где $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ - средние сравниваемых совокупностей;

$m_{\bar{x}_1}$ и $m_{\bar{x}_2}$ - ошибки средних;

$\sqrt{m^2_{\bar{x}_1} + m^2_{\bar{x}_2}}$ - ошибка разности средних.

В практических расчетах считают, если $t_н \geq 3$, то разность не случайна. Если в каждой выборке число наблюдений $n > 30$, то вместо 3 можно взять число равное 2,58, что с вероятностью 0,99 показывает, что разность средних достоверна при $t_{н.} \geq 3\ (2,58)$.

$$t_н = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{m^2_{\bar{x}_1} + m^2_{\bar{x}_2}}} \geq 3\ (2,58).$$

В тех случаях, когда требуется большая точность, t критическое можно найти и по таблице Стьюдента для заданного уровня значимости α и для степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$. Если $t_{н.} > t_{кр}(\alpha, k)$, то $H_0(\bar{x}_1 = \bar{x}_2)$ отвергается, т.е. средние различаются значимо.

Пример. Произведены измерения прыжков в высоту с места ($n_1 = 35$) волейболистов-перворазрядников и ($n_2 = 40$) волейболистов, имеющих второй разряд. Средний результат измерений и средняя ошибка равны:

$$\bar{x}_1 = 65{,}3 \text{ (см)} \qquad m_{\bar{x}_1} = 0{,}8 \text{ (см)}$$
$$\bar{x}_2 = 61{,}5 \text{ (см)} \qquad m_{\bar{x}_2} = 0{,}9 \text{ (см)}$$

Определить достоверность оценки разности средних значений прыжков в высоту с места волейболистов I и II разрядов.

Решение:

$$1.\quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 65{,}3 - 61{,}5 = 3{,}8$$

$$2.\quad m^2_{\bar{x}_1} + m^2_{\bar{x}_2} = (0{,}8)^2 + (0{,}9)^2 = 1{,}45$$

$$3.\quad t_{н.} = \frac{3{,}8}{\sqrt{1{,}45}} = 3{,}17.$$

$$4.\quad t_{кр.} = 2{,}58. \qquad t_{н.} = 3{,}17.$$

$$t_{н.} > t_{кр.}$$

Получается, что разность не случайна, а достоверна с вероятностью 0,99, следовательно, волейболисты I и II разрядов различаются по результатам прыжка в высоту с места не случайно.

VI. Оценка достоверности различия средних двух независимых выборочных совокупностей (малые независимые выборки)

В тех случаях, когда выборки изменяются независимо друг от друга, их называют независимыми.

Если сравнивают две совокупности, имеющие малое число членов ($n < 30$), независимых друг от друга, то ошибка разности, наблюдаемой между средними значениями, вычисляется по формуле:

$$m_d = \sqrt{\frac{[(n_1-1)\cdot\sigma_1^2 + (n_2-1)\sigma_2^2]\cdot(n_1+n_2)}{(n_1+n_2-2)\cdot(n_1\cdot n_2)}}$$

$\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – средние значения;

n_1 и n_2 – число членов в выборках.

В этом случае наблюдаемое значение критерия определяется по формуле:

$$t_н = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{m_d} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\left[\frac{(n_1-1)\cdot\sigma_1^2 + (n_2-1)\cdot\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}\right]\cdot\left[\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}\right]}}$$

Для определения t критического используют таблицу Стьюдента (приложение, табл. I). По данному уровню значимости α (0,05, 0,0I, 0,00I) и по вычисленному числу степеней свободы k $[k = n_1+n_2-2]$ находят t критическое. Если $t_{н.} > t_{кр.}$, то это будет указывать на то, что разность средних значений двух совокупностей достоверна, неслучайна и надежность такого вывода будет равна соответственно P (0,95, 0,99, 0,999).

Пример. На XIX Олимпийских играх в Мехико (I968 г.) $n_1 =$ I0 тяжелоатлетов средней весовой категории до 82,5 кг в жиме показали следующие результаты x_1 (кг).

x_1 : I50; I52,5; I40; I50; I55; I35;I40; I35; I45; I35.

$n_2 =$ 8 лучших тяжелоатлетов СССР (I97I г.) в том же упражнении показали результаты x_2(кг):

x_2 : I70; I67,5; I65; I60; I70; I62,5; I60; I55.

Сравнить средние этих двух совокупностей и выяснить, является ли разность средних достоверной. Если да, то определить доверительную вероятность. Решение (табл. I):

Таблица I

Результат x_1(кг)	Результат x_2(кг)	$x - \bar{x}_1$	$x - \bar{x}_2$	$(x-\bar{x}_1)^2$	$(x-\bar{x}_2)^2$
I50	I70	6,25	6,25	39,0625	39,0625
I52,5	I67,5	8,75	3,75	76,5625	I4,0625
I50	I65	6,25	I,25	39,0625	I,5625
I40	I60	-3,75	-3,75	I4,0625	I4,0625
I55	I70	II,25	6,25	I26,5625	39,0625
I35	I62,5	-8,75	-I,25	76,5625	I,5625
I40	I60	-3,75	-3,75	I4,0625	I4,0625
I35	I55	-8,75	-8,75	76,5625	76,5625
I45		I,25		I,5625	
I35		-8.75		76.5625	
Σx_1 =I437,5	Σx_2= I3I0,0			Σ = 540,625	Σ = 200,00

Определяем средние значения совокупностей $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$.

$$\bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_{i1}}{n_1} = \frac{1437,5}{10} = 143,75\ (кг)$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\Sigma x_{i2}}{n_2} = \frac{1310,0}{8} = 163,75\ (кг)$$

Достоверна ли разность $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = (163,75 - 143,75) = 20$ кг. Можно ли утверждать, что приведенных данных достаточно для того, чтобы установить, что эта разность неслучайна?

Решение:

$$1.\ \sigma_1^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{X}_1)^2}{n_1-1} = \frac{540,625}{9} = 60\ (кг)$$

$$1.\ \sigma_2^2 = \frac{200,0}{7} = 28,5\ (кг).$$

2) С этими данными определяют m_d при $n_1 \neq n_2$

$$m_d = \sqrt{\frac{\sigma_1^2(n_1-1)+\sigma_2^2(n_2-1)}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 \cdot n_2}} = \sqrt{\frac{(540,625+200,0)}{(10+8-2)} \cdot \frac{(10+8)}{(10 \cdot 8)}} =$$

$$= 3,23\ (кг)$$

Вычислим t, наблюдаемое по формуле:

$$t_н = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{m_d} = \frac{20}{3,23} = 6,19.$$

t критическое определяем по таблице Стьюдента при уровне значимости $\alpha = 0,001$ и по числу степеней свободы $k = n_1+n_2-2$

$t_{крит.}: (0,001;\ 16) = 4,01$

имеем $t_н\ (6,19) > t_{кр}\ (4,01)$

Получили, что $t_н > t_{кр}$ следовательно, разность между средними двух совокупностей достоверна с вероятностью 0,999. Различие между средними можно проверять, сравнивая между собой границы доверительных интервалов, в которые попадают $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$.

$$\bar{X}_1 \pm t\, m_{\bar{X}_1} = 143,75 \pm 2,57 \cdot 4,78 = 143,75 \pm 12,28$$

$$m_{\bar{X}_1} = \sigma_1 / \sqrt{n_1-1} = \sqrt{60/9} = \sqrt{6,6} = 2,57$$

$$\bar{x}_2 \pm t_2 m_{\bar{x}_2} = 163,75 \pm 2,01 \cdot 5,4 = 163,75 \pm 10,85$$

$$m_{\bar{x}_2} = \sigma_2 / \sqrt{n_2 - 1} = \sqrt{28,5/7} = \sqrt{4,07} = 2,01$$

$$t_{кр_1}(\alpha = 0,001,\ k = 9) = 4,78;\quad t_{кр.2}(\alpha = 0,001,\ k = 7) = 5,40$$

$$131,47 \le \bar{x}_1 \le 156,03$$

$$152,0 \le \bar{x}_2 \le 174,60$$

Границы доверительных интервалов даже приблизительно не совпадают, что говорит о неправильности нулевой гипотезы $H_0\ (\bar{x}_1 = \bar{x}_2)$, значит, средние различаются достоверно, т.е. различие между командами несомненно.

Границы 131,47 ÷ 156,03
152,9 ÷ 174,60

VII. Оценка достоверности различия между вариантами двух зависящих выборочных совокупностей

При сравнении двух зависящих друг от друга выборок небольшого объема ($n < 30$) с равным числом членов в каждой выборке целесообразно пользоваться методом парных сравнений. Сущность метода заключается в том, что сравнивают между собой не средние значения выборок, а парные варианты выборочных совокупностей, такие сопряженные выборки получаются при проведении испытания в одних и тех же условиях и при оценивании одних и тех же показателей. В этом случае смысл критерия проверки достоверности заключается в следующем:

I. Наблюдаемое значение критерия ($t_{н.}$) считают по формуле:

$$t_{н.} = \bar{d} / m_d$$

где $\bar{d}$ – есть среднее значение разности (d) пар:

$$d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

$$\bar{d} = \frac{\Sigma d_i}{n} = \frac{\Sigma (x_{i1} - x_{i2})}{n};$$

где m_d есть средняя ошибка разности, вычисляемая по формуле:

$$m_d = \sigma_d / \sqrt{n},\quad m_d = \sigma_d / \sqrt{n-1},\ \text{при } n < 100.$$

где

$$\sigma_d = \sqrt{\Sigma (d_i - \bar{d})^2 / n - 1};$$

2. Критическое значение ($t_{кр.}$) находится по таблице критических точек распределения Стьюдента (см.приложение) по любому уровню значимости α (0,05, 0,0I, 0,00I) и по числу степеней свободы ($k = n-1$), $t_{кр}(\alpha, k)$.

3. Вывод: если $t_{н.} \leq t_{кр.}(\alpha, k)$, то различие между вариантами зависимых выборок недостоверно, случайно.

Пример: Измерялось нижнее артериальное давление у спортсменов до нагрузки (x_1 мм рт.ст.) и после нагрузки (x_2 мм рт.ст.). Определить достоверность влияния силовой нагрузки на величину артериального давления. (Данные измерений приведены в таблице 2).

Таблица 2

Испытуемые	Артериальное давление	
	до нагрузки мм рт.ст. x_1	после нагрузки мм рт.ст. x_2
I	55	40
2	65	60
3	60	50
4	70	60
5	65	50

Решение: составляют таблицу для упрощения расчетов (табл. 3).

Таблица 3

I	2	3	4	5	6
Испытуемые	x_1 до нагрузки	x_2 после нагрузки	d_i разность	$d_i - \bar{d}$ отклонение	$d^2 = (d_i - \bar{d})^2$
I	55	40	I5	4	I6
2	65	60	5	-6	36
3	60	50	I0	-I	I
4	70	60	I0	-I	I
5	65	50	I5	4	I6
			$\sum d_i = 55$ $\bar{d} = 11$		$\sum = 70$

I. Определяют разность соответствующих пар и их сумму.

$$\sum d_i = 15 + 5 + 10 + 10 + 15 = 55.$$

2. Определяют среднее значение (см. 4-й столбец табл. 3)

$$\sum_1^5 (x_{1i} - x_{2i}) = \sum_1 d_i = 55. , \quad \bar{d} = 11.$$

3. Определяют среднее квадратическое отклонение разностей $\bar{d}$: (см.табл. 3).

$$\bar{d} = \sum d_i / n = 55/5 = 11 \quad , \sigma_d = 4.18.$$

4. Определяют среднюю ошибку разностей σ_d :

$$\sum_1^5 (d_i - \bar{d})^2 = 70 \quad , \sigma_d = \sqrt{\Sigma(d_i - \bar{d})^2 / n_1 - 1} = 4,18$$

$$m_d = \sigma / \sqrt{n} = 4,18 / \sqrt{5} = 1,87.$$

5.

$$t_{н.} = \bar{d} / m_d = 11 / 1.87 = 5,88$$

$t_{кр.}$ находим по таблице критических точек распределения Стьюдента

$$t_{кр.} (\alpha = 0,01 ; k = 4) = 4,60$$

6. $t_{н.} > t_{кр.} (5,88 > 4,6)$, т.е. разность достоверна, это означает, что силовая нагрузка влияет на величину нижнего артериального давления.

УШ. Проверка достоверности коэффициента корреляции

Получаемый при решении задач коэффициент корреляции r_{xy} является выборочным, и даже в том случае, когда он оказался отличным от нуля, еще нельзя заключить, что и коэффицент корреляции генеральной совокупности $r_г$, из которой была сделана выборка, также отличен от нуля. Поэтому необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности H_0 ($r_г = 0$) при альтернативной гипотезе

Если нулевая гипотеза будет отвергнута, то это означает, что выборочный коэффициент корреляции достоверен, значимо отличается от нуля, а признаки Х и У связаны между собой корреляционной зависимостью.

Значимость коэффициента корреляции проверяется по критерию Стьюдента, вычисляются значения t наблюдаемое, t критическое и их сравнивают:

1. $$t_{н.} = r_в / m_r = r_в \cdot \sqrt{n-2} / \sqrt{1-r_в^2};$$

2. $t_{кр.}(\alpha, k=n-2)$ - находят по таблице Стьюдента.

3. Если $|t_н| > t_{кр.}$, то нулевую гипотезу отвергают, следовательно, $r_в$ значимо отличается от нуля.

Пример. Измерили зависимость между данными толчка штанги и результатами прыжка в высоту с места у 13 тяжелоатлетов, получили, что признаки коррелированы и коэффициент корреляции $r_в$ = 0,855. Определить достоверность полученного коэффициента корреляции.

Решение:

1. Ошибка коэффициента корреляции m_r равна:

$$m_r = \sqrt{1-r^2} / \sqrt{n-2} = \sqrt{1-0{,}855^2/11} = 0{,}156$$

2. Наблюдаемое значение критерия равно:

$$t_{н.} = r / m_r = 0{,}855 / 0{,}156 = 5{,}48$$

3. По уровню значимости α = 0,05 и числу степеней свободы α = 13 - 2 = 11 находим по таблице (приложение № 1) значение $t_{кр.}$, равное 2,2; $t_{кр.}(\alpha = 0{,}05; k = 11) = 2{,}201 \approx 2{,}2$.

4. Т.к. $t_{н.} > t_{кр.}$, можно сделать вывод, что r = 0,855 значимо отличается от нуля, и данные признаки связаны положительной корреляционной зависимостью.

IX. Показатель z.

Для оценки достоверности корреляционной зависимости удобно пользоваться z преобразованием Фишера.

Преобразование r в z производится посредством формулы:

$$z = 1/2 \ln(1+r / 1-r) \quad \text{или} \quad z = 1{,}15129 \lg(1+r / 1-r)$$

Показатель z наиболее надежен при малых выборках, при этом не нужно вычислять ошибки m_r, т.к. преобразование r в z производится по специальной таблице (см.приложение, табл. IV).

Средняя ошибка для z определяется по формуле:

$$m_z = 1/\sqrt{n-3};$$

а достоверность оценивается аналогично по критерию Стьюдента:

$$t_{н.} = z/m_z = z\cdot\sqrt{n-3}, \quad t_{кр.}(\alpha, k=n-2)$$

Пример. Для r = 0,57 находим значение z, соответствующее r по таблице П приложения. Эта величина равняется 0,648. $(n=19)$

Ошибка для z:

$$m_z = 1/\sqrt{19-3} = 0,25.$$

Тогда

$$t_{н.} = z/m_z = 0,648/0,25 = 2,592$$

По таблице 3 находим, что числу степеней свободы $k = 17$, и уровню значимости α = 0,05 соответствует значение $t_{кр.}$ = 2,110, т.е. $t_{н.} > t_{кр.}$

Так как $t_{н.}$ = 2,592 превосходит предельное $t_{кр.} = 2,110$ то это означает, что найденный коэффициент корреляции достоверен.

В исследованиях часто приходится сравнивать два показателя корреляции. Цель этого - определить, является ли различие двух коэффициентов корреляции достоверным или случайным. Оценка достоверности различий между коэффициентами корреляции двух выборочных совокупностей определяется так же, как и для одного коэффициента корреляции, только $t_{н.}$ наблюд. вычисляется по формуле:

$$t_н = z_1 - z_2 / \sqrt{1/n_1-3 + 1/n_2-3};$$

где z_1 и z_2 значения, соответствующие коэффициентам корреляции, находятся по таблице П приложения.

Обратный перевод, т.е. получение значения коэффициента корреляции r, по значению показателя z, осуществляется по таблице Ш приложения.

X. Критерий Фишера
(сравнение дисперсий двух генеральных совокупностей)

Имеется две нормально распределенные генеральные совокупности X и Y; из этих совокупностей отбираются две независимые выборки объема n_1 и n_2 и найдены выборочные дисперсии

S_x^2 и S_y^2 , ставится задача проверить по выборочным дисперсиям равенство генеральных дисперсий σ_x^2 и σ_y^2.

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы $H_0(\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$ используют критерий Фишера. Наблюдаемое значение критерия $F_{н.}$ находится как отношение большей дисперсии к меньшей.

$$F_{н} = \frac{S^2_{большая}}{S^2_{меньшая}}$$

Критическое значение $F_{кр.}$ находится по таблице критических точек Фишера (приложение, табл. IУ) по заданному уровню значимости α и по двум значениям степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$.

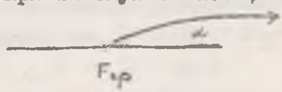
Число степеней свободы k_1, k_2 равно числу независимых переменных без числа связей, накладываемых на эти переменные.

В зависимости от условия альтернативной гипотезы методика проверки нулевой гипотезы следующая:

I. $H_0(\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$, при $H_1(\sigma_x^2 > \sigma_y^2)$

В этом случае строим правостороннюю критическую область, т.е.

$$P(F_{н.} > F_{кр}) = \alpha \quad .$$



I. Вычисляют отношение большей дисперсии к меньшей.

$$F_{н.} = \frac{S^2_{большая}}{S^2_{меньшая}}$$

2. По таблице критических точек (см.приложение, табл. П) по заданному уровню значимости α и по двум степеням свободы k_1 и k_2 находят критическую точку $F_{кр}(\alpha, k_1 = n_1 - 1, k_2 = n_2 - 1)$, где k_1 – число степеней свободы большей дисперсии.

3. Если $F_{н.} > F_{кр.}$, то H_0 отвергается и принимается альтернативная $H_1(\sigma_x^2 > \sigma_y^2)$.

II. Если же альтернативная гипотеза H_1 выдвигается о том, что дисперсии не равны, то в этом случае строят двустороннюю критическую область.

$H_0\ (\sigma_x^2 = \sigma_y^2)$, при $H_1(\sigma_x^2 \neq \sigma_y^2)$

Исходя из положения, что сумма вероятности попадания критерия в эти области равна α , имеем

$$P(F_н < F_{кр2}) = \alpha/2$$

$$P(F_н > F_{кр1}) = \alpha/2$$

В этом случае область принятия нулевой гипотезы будет определяться неравенствами $F_н < F_{кр.1}$ и $F_н > F_{кр.2}$

т.е. $$F_{кр.2} < F_н < F_{кр.1}$$

В связи с тем, что таблица Фишера (см.приложение) не содержит левых критических точек, находят только правую $F_{кр.1}$ по уровню значимости $\alpha/2$ и степеням свободы k_1 и k_2, что оказывается вполне достаточным для проверки, т.е. $F_{кр.}(\alpha/2, k_1, k_2)$, где k_1 - число степеней свободы большей дисперсии.

Если $F_н < F_{кр}$,то H_0 - принимается.

Пример. У двух групп спортсменов тяжелоатлетов измерили показатель в жиме для анализа зависимости между их силой и соответственным весом. В I группу входило 20 человек (вес 60 кг), во II группу - 30 человек (вес 63 кг). Средний результат в жиме у I группы $\bar{x}_1$ = 76,8 кг (σ_1 = 7,7 кг), у II группы - $\bar{x}_2$ = 79,7 (σ_2 = 8,6 кг).

Требуется оценить, значимо ли различаются эти группы, т.е. относятся ли они к одной генеральной совокупности или нет. Для этого проверим нулевую гипотезу о равенстве дисперсий H_0 ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$), при $H_1(\sigma_2^2 > \sigma_1^2)$ (средние $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ достоверно не различаются).

Решение:

1. $$F_н = \frac{\sigma^2_{большая}}{\sigma^2_{меньшая}} = \frac{8.6^2}{7,7^2} = \frac{73,96}{59,29} = 1,247$$

2. $F_{кр}\ (\alpha = 0,05,\ k_1 = 29,\ k_2 = 19) = 1,95$ нашли по таблице IУ (см.приложение).

3. $F_н < F_{кр.}$ $(1,24 < 1,95)$ принимаем нулевую гипотезу о равенстве дисперсии генеральных совокупностей, поэтому делаем вывод, что группы не различаются значимо между собой.

XI. Непараметрические критерии

Непараметрические критерии не требуют вычисления таких параметров, как $\bar{x}$, σ, D и т.д., и для их применения необходимо упорядочить ряд в виде кумуляции (накопления) эмпирических и теоретических частот, к тому же непараметрические критерии пригодны для оценки выборочных распределений любого вида в отличие от параметрических, оценивающих только нормально распределенные совокупности, т.е. эти критерии удобны тем, что не требуют знания типа распределения генеральной совокупности.

XII. Критерий λ -Колмогорова-Смирнова

1. Этот критерий применяется при сопоставлении эмпирических совокупностей большого объема для установления, в какой мере эмпирический вариационный ряд соответствует нормальному распределению.

Выдвигается нулевая гипотеза о нормальности распределения генеральной совокупности, из которой произведена выборка и составлен эмпирический ряд.

В качестве наблюдаемого значения критерия подсчитывается оценка $\lambda = d_{max} / \sqrt{n}$, где d_{max} - максимальная разность между значениями накопленных частот эмпирического и теоретического ряда (без учета знаков).

n - число всех вариант совокупности.

Значения критические при соответствующих уровнях значимости равны соответственно:

$\lambda_{кр}(\alpha = 0,05) = 1,36$. $\lambda_{кр}(\alpha = 0,001) = 1,95$

$\lambda_{кр}(\alpha = 0,01) = 1,63$

При применении критерия λ -Колмогорова-Смирнова отпадет надобность вычисления числа степеней свободы и использования таблиц. Если λ наблюдаемое меньше λ кр., то H_0 принимается, т.е. расхождения между эмпирическими и теоретическими частотами случайны и имеет место нормальное распределение генеральной совокупности.

2. В том случае, если сравниваются два эмпирических распределения, взятые из одной генеральной совокупности, но имеющие разные объемы, гипотеза H_0 будет заключаться в том, что проверяют значимость различия между эмпирическими рядами, т.е. являются ли они выборками из одной генеральной совокупности или из двух разных генеральных совокупностей. Наблюдаемые значения критерия λ вычисляют по следующей формуле:

$$\lambda = d_{max} \cdot \sqrt{(n_1 \cdot n_2)/(n_1 + n_2)}$$

d_{max} - это максимальная разность между значениями накопленных относительных частот первого эмпирического ряда n_1^*/n_1 и второго n_2^*/n_2

$$d_{max} = \sum n_1^*/n_1 - \sum n_2^*/n_2$$

λ критическое имеет те же значения. Если $\lambda_{н.} < \lambda_{кр}$, то H_0 принимается.

Пример. Предположим, что имеются две группы: волейболисты - 200 человек и легкоатлеты (бег на длинные дистанции) - 200 человек, у которых измерен рост. Необходимо выяснить, достоверно ли различаются эти группы по росту.

Для определения этого различия используем критерий Колмогорова-Смирнова и запишем значения роста в таблицу 4 (первый столбец), а для каждого значения роста частоту его появления; у волейболистов n_1^*, у легкоатлетов n_2^*. Анализ различия проведем, используя только частоту появления результатов. Для определения подобного различия можно было бы использовать и критерий Стьюдента.

Максимальная разность накопленных частот в данном случае равна 0,175 (см. стр. 23.) :

$$\lambda_{н.} = d_{max} \cdot \sqrt{(n_1 \cdot n_2)/(n_1 + n_2)} = 0,175\sqrt{200 \cdot 200/400} =$$
$$= 1,75; \quad \alpha = 0,05, \quad \lambda_{кр.}(0,05) = 1,36$$

Получили, что $\lambda_н > \lambda_{кр}$, следовательно, H_0 отвергается, т.е. эмпирические ряды в данном случае имеют существенное различие (объем выборки для критерия λ должен быть не менее 100),

Таблица 4

Значения роста	Частоты n_1^*	n_2^*	Относительные частоты n_1^*/n_1	n_2^*/n_2	Накопленные частоты $\sum n_1^*/n_1$	$\sum n_2^*/n_2$	d -разность между рядами накопленных частот
I56	I	I	0,005	0,005	0,005	0,005	0,000
I60	5	3	0,025	0,0I5	0,030	0,020	0,0I0
I64	I7	7	0,085	0,035	0,II5	0,055	0,060
I68	45	22	0,225	0,II0	0,340	0,I65	$\boxed{0,I75}$
I72	70	88	0,350	0,440	0,690	0,605	0,085
I76	5I	69	0,255	0,345	0,945	0,950	0,005
I80	I0	7	0,050	0,035	0,995	0,985	0,0I0
I84	I	2	0,005	0,0I0	I,000	0,995	0,005
I88	0	I	–	0,005	I,000	I,000	0,000
Сумма	n_1=200	n_2=200	I	I	–	–	2

т.е. волейболисты по росту отличаются от бегунов достоверно, они значительно выше.

XШ. Критерий Уайта

Для сравнения двух выборочных эмпирических совокупностей между собой (при малых выборках) применяют критерий Уайта, при котором сравнивают суммы рангов совокупностей с предельными значениями этого критерия. Если эмпирические совокупности значимо не различаются, то и суммы их рангов должны быть равны между собой. Чем значительнее различаются совокупности, тем больше разница между суммами их рангов. Критические значения $U_{кр}$. критерия Уайта находят по таблице У (приложение), рассчитанной для наблюдаемых выборок разного объема. Гипотеза H_0 состоит в предположении о значимости (неслучайности) различия эмпирических совокупностей X и У. В качестве наблюдаемого значения критерия берется меньшая из двух сумм рангов $\sum R_x$ и $\sum R_y$ ($\sum R_{min} \leq U_{кр}$). Если ($\sum R_{min} < U_{кр}$), то различие между совокупностями X и У считается значимым, H_0 – принимается.

Пример. Юные пловцы разделены на две группы: экспериментальную (X) и контрольную (У). В экспериментальной группе (X) применялась новая методика тренировки. Результаты на дистанции 200 м по месяцам следующие:

X: 3.18,2; 2.58,2; 2.56,7; 2.47,6; 2.46,2; 2.44,5; 3.00,0; 2.57,6; 2.48,I; 2.30,4.

У: 3.22,3; 3.22,2; 3.I9,6; 3.I4,9; 3.06,0; 3.04,I; 3.I4,6; 3.I4,7; 3.I3,9; 3.03,6; 3.49,2.

Определить, значимо ли различаются по результатам эти две группы в результате применения новой методики тренировки.

Решение. I. Ранжируем всю совокупность наблюдений.

Совокупность	X	X	X	X	X
Результат	2.30,4	2.44,5	2.46,2	2.47,6;	2.48,I
Ранг R	I	2	3	4	5

Совокупность	У	X	X	X	X	У	У
Результат	2.49,2	2.56,7	2.57,6	2.58,2	3.00,0	3.03,6	3.04,I
Ранг R	6	7	8	9	I0	II	I2

Совокупность	У	У	У	У	У	X	У
Результат	3.06,0	3.I3,9	3.I4,6	3.I4,7	3.I4,9	3.I8,2	3.I9,6
Ранг R	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9

Совокупность	У	У
Результат	3.22,2	3.22,3
Ранг R	20	2I

2. Находим суммы рангов (R_x и R_y)

$$\sum R_x = 1+2+3+4+5+8+7+9+10+18 = 67.$$

$$\sum R_y = 6+11+12+13+14+15+16+17+19+20+21 = 164.$$

Проверки правильности расчетов по общей сумме рангов:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{21\cdot 22}{2} = \underline{231}.$$

$$\sum R_x + \sum R_y = 67+164 = \underline{231}.$$

$U_{кр}(n_1=10, n_2=11, \alpha=0{,}05) = 96$, $\sum R_{min} = 67 < U_{кр}$, H_0 - принима

Следовательно, в данной задаче различие между эмпирическими совокупностями X и У значимо, т.е. новая методика тренировки приемлема. ($U_{кр}$ находится по таб. $\underline{V}$).

XIУ. Критерий Вилкоксона

Для оценки различий достоверности между значениями двух выборочных совокупностей используется критерий Вилкоксона. Этот критерий основан на ранжировании разности между значениями совокупностей. Ранги, соответствующие отрицательным разностям $(x_i - y_i)$, берутся со знаком - (минус), ранги с отрицательными и положительными знаками суммируются отдельно $\sum_i R$ т.е. $\sum_i(-R)$ и $\sum(+R)$. Затем берется меньшая по абсолютной величине сумма и сравнивается с критическим значением $B_{кр}(\alpha, n)$. критерия Вилкоксона, находимое по таблице IУ (см.приложение). Для данного уровня значимости α и числа парных наблюдений n, $(n \geqslant 6)$.

Если $\quad |\sum_i R_{min}| < B_{кр.}(\alpha, n).$

то в этом случае различие между сравниваемыми вариантами достоверно.

Пример. Измерена динамометрия правой (Хкг) и левой руки (У кг) у восьми спортсменов волейболистов. Определить достоверность различия силы правой и левой руки волейболистов (табл. 5).

Х:	62	50	70	56	60	58	5I	66
У:	54	52	60	46	63	52	46	62

Таблица 5

№	Х	У	Разность $x_i - y_i$	Ранжир. разность	Ранг R
I	62	54	8	-2	-I
2	50	52	-2	-3	-2
3	70	60	I0	4	3
4	56	46	I0	5	4
5	60	63	-3	6	5
6	58	52	6	8	6
7	5I	46	5	I0	7,5
8	66	62	4	I0	7,5

Сумма рангов: с отрицательными знаками: $\sum(-R) = (-1)+(-2) = (-3)$.

$\sum(+R) = 3+4+5+6+7{,}5+7{,}5 = 33.$

$(\min \sum_i |R|)$ по абсолютной величине $\min \sum R = 3$.

Критическое значение $B_{кр}(0{,}005,\ n=8)$ находится по таблице УI Вилкоксона (приложение) . $B_{кр.} = 4$.

$|\min \sum R| < B_{кр}(\alpha, k)$ следовательно, различие между силой правой и левой руки достоверно.

ХУ. Задачи

№ I. Средняя величина и средняя ошибка абсолютной силы различных мышечных групп у борцов приведены в табл. 6:

Таблица 6

Группа спортсменов	Вес (средний в кг)	Абсолютная сила различных групп мышц (кг)					
		предплечье		плечо		туловище	
		сгибат.	разгиб.	сгибат.	разгиб.	сгибат.	разгиб.
Члены команды сборных СССР (I5 человек) $m_{\bar{x}}$	70,6	64,9 ±I,7	66,0 ±2,3	65,2 ±I,7	84,2 ±2,I	58,8 ±I,0	2I2,I ±3,0
Мастера спорта (I5 человек) $m_{\bar{x}}$	70,6	59,2 ±I,5	55,2 ±I,8	53,0 ±2,2	69,4 ±2,6	50,0 ±2,0	I88,7 ±3,6

Определить достоверность различий между средними арифметическими в различных мышечных группах ($n = 30$).

Найти доверительный интервал при вероятности 0,95.

№ 2. Спортсмены I и II сборных команд Ереванского СКИФа по баскетболу на тренировках совершили 50 штрафных бросков, из них результативными оказались:

I команда	48	46	44	42	45	47	49	45	46	44
II команда	38	36	39	40	4I	37	39	36	39	40

Определить оценку достоверности различий между средними арифметическими результативных бросков у I и II команд.

№ 3. Баскетболисты команды "А" в единоборстве (IxI) в 30 случаях верно предугадали действие противников при атаке кольца

26 23 2I 20 I8 I6 I8 I5 I7 I6 I4 I8 раз,

а баскетболисты команды "Б" предугадали правильно из 20 случаев

I7 I6 I5 I3 I4 I2 I4 I6 I3 I2 раз.

Определить достоверность различий средних арифметических правильного предугадывания действий при атаке кольца, $\alpha = 0,05$.

№ 4. Избраны две группы спортсменов-тяжелоатлетов, которые тренируются по разным методикам.

Одна группа тренируется по обычной методике (контрольная), а другая по новой (экспериментальная).

После пятимесячной тренировки измерили средний прирост результата (кг). Получили следующие данные (табл. 7).

Таблица 7

Экспериментальная группа	0	5	7,5	7,5	10	10	12,5	15	15	20	20
Контрольная группа	0	0	5	7,5	10	10	12,5	12,5	12,5	14	15

При сравнении двух методик нужно доказать, возможно ли, что разница между средними арифметическими прироста результата достоверна ($\alpha = 0,01$). Произведены измерения роста тяжелоатлетов и борцов. При статистической обработке данных выяснилось, что

$$\bar{x}_1 \pm m_{\bar{x}_1} = 171,4 \pm 1,2 \text{ (см)}$$
$$\bar{x}_2 \pm m_{\bar{x}_2} = 169,5 \pm 1,06 \text{ (см)}$$

Определить, достоверно ли различаются средние роста спортсменов?

№ 5. Средние значения роста у лыжников (30 человек) и пловцов (50 человек) соответственно равны:

$$\bar{x}_1 \pm m_{\bar{x}_1} = 168,4 \pm 1,11$$
$$\bar{x}_2 \pm m_{\bar{x}_2} = 173,6 \pm 0,79$$

Определить достоверность различий между средними роста у представителей этих двух видов спорта.

№ 6. Сравнить силу кисти правой руки у занимающихся и незанимающихся спортом. Результаты (кг) (табл. 8)

Таблица 8

Занимающиеся спортом	50	50	56	60	60	70	65	58	67	71
Незанимающиеся спортом	35	40	39	37	42	50	53	49	50	35

Достоверно ли различие?

Сравнить границы доверительных интервалов.

№ 7. Измерили средние результаты мастеров спорта международного класса и 15 перворазрядников тяжелоатлетов одних и тех же весовых категорий. Средние результаты и средняя ошибка следующие:

МСМК : $\bar{x}_1 \pm m_{\bar{x}_1} = 455 \pm 4,5$ (кг)

I разряд $\bar{x}_2 \pm m_{\bar{x}_2} = 397 \pm 5$ (кг)

На какую величину различаются границы доверительных интервалов при уровнях значимости: 0,05; 0,005. Достоверно ли различие результатов?

№ 8. Достоверно ли различие в результатах пловцов стилем баттерфляй: мастеров спорта и перворазрядников на дистанции 100 м [x сек, . Средние результаты и средняя ошибка следующие:

МС : $\bar{x}_1 \pm m_{\bar{x}_1} = 57,3 \pm 0,3$

I разряд $\bar{x}_2 \pm m_{\bar{x}_2} = 62,1 \pm 0,4$

Определить доверительные границы доверительных интервалов при вероятности 0,99.

№ 9. При исследовании новых режимов питания детей в возрасте от 6 до 9 месяцев требовалось установить, ускоряет ли увеличение их веса добавка к ежедневному питанию витамина Д. Отобраны 100 шестимесячных мальчиков и разделены на две группы по 50 детей.

I группа - экспериментальная, II группа - контрольная.

Через 3 месяца после начала эксперимента средний вес и средние отметки оказались:

I группа $\bar{x}_1$ = 9,114 кг. $m_{\bar{x}_1}$ = 0,80 кг.

II группа $\bar{x}_2$ = 8,614 кг. $m_{\bar{x}_2}$ = 0,833 кг.

Можно ли считать полученную разность $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ = 0,5 кг результатом изменения режима питания?

№ 10. Результаты попадания штрафных бросков баскетболистов до тренировки следующие:

45 44 70 73 58 53 65 59 55 58 47 70

и после тренировки:

50 51 75 78 62 55 66 62 60 52 56 74

Оценить, достоверно ли различаются средние результаты попадания штрафных бросков и равны ли дисперсии?

№ II. Измерили вес двух групп спортсменов по 90 человек в каждой в возрасте от I8 до 24 лет и получили следующие результаты:

среднее значение веса I группы $\bar{x}_1$ = 7I,4 кг, σ_1^2 = 5,I кг

среднее значение веса II группы $\bar{x}_2$ = 76,6 кг и дисперсия σ_2^2 = 7,35 кг

Определить, значимо ли расхождение между средними показателями этих групп и достоверно ли различают их дисперсии?

№ I2. Определить достоверность зависимости между длиной шага лыжника и дистанцией (при уровне значимости α = 0,0I).

Дистанция	I5	30	50	5
Длина шага	4,36	4,26	3,72	2,87

№ I3. Определить, достоверна ли зависимость установления количества мировых рекордов от всесоюзных в различных видах спорта?

Всесоюзные	I52	424	424	523	38I	375	4I8	323	259
Мировые	I7	27	I6	3I	3I	57	I22	II9	73

Уровень значимости взять равным 0,005.

№ I4. В финале кубка СССР женщины в беге на I00 м, 200 м, 400 м показали следующие результаты:

X: II,5; II,6; II,7; II,9; I2,0; I2,0; I2,0; I2,2; I2,3

У: 23,4; 24,6; 24,8; 25,0; 25,0; 25,2; 25,4; 25,6; 25,8

Z: 54,4; 54,5; 55,3; 57,2; 57,8; 59,0; 59,7; 59,9; I.03,6

Определить достоверность коэффициентов корреляции r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} и коэффициента множественной корреляции $R_{x.yz}$

№ I5. Месячная средняя интенсивность тренировок – x кг. и результаты троеборья У (м) у тяжелоатлетов следующие:

X:	89,3	90,5	I02,I	II6	II6,4	I25	I29	I22	I25	I4I
У:	340	350	382,5	480	450	480	5I0	475	485	552,5

Найти коэффициент корреляции и достоверность его с вероятностью 0,95.

№ I6. При силовой нагрузке (II25 $\frac{\text{кг}}{\text{сек}}$) минимальное артериальное давление до X (мм рт.ст.) и после У (мм рт.ст.) нагрузки у спортсменов соответственно были:

X:	70	65	60	75	70	80	60	55	65	70
У:	40	60	50	40	60	60	50	40	50	60

Определить коэффициент корреляции между артериальным давлением до и после нагрузки и достоверность этого коэффициента при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

№ I7. Был измерен пульс борцов до X (ударов в мин) и после У (ударов в мин) разминки. Результаты следующие:

X: 96 90 78 78 90 68 72 I04 60 80 78 72

У: I56 I38 I32 II4 I50 I06 I40 I44 I38 I48 I62 I20

Определить достоверность коэффициента корреляции r_{xy} и коэффициентов регрессии $b_{x/y}$ и $b_{y/x}$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}0I$.

№ I8. На чемпионате Европы десятиборцы в прыжках в длину [X см.] и в беге на I00 м [У сек.] показали следующие результаты:

X: I0,8 I0,9 II,I II,I II,3 II,4 II,I

У: 7,62 7,37 6,93 7,40 7,03 7,I5 7,I3

Найти коэффициент корреляции и оценить его достоверность при уровнях значимости: 0,0I и 0,00I.

№ I9. Становая сила X (кг) баскетболистов I разряда и абсолютная поверхность тела У ($м^2$) имеют следующее распределение:

X: I50 I53 I55 I60 I65 I70 I75 I80

У: I,83 I,82 I,84 I,86 I,93 I,96 2,03 2,I2

Определить достоверность зависимости между становой силой и абсолютной поверхностью тела баскетболистов.

№ 20. На зачете по основам статистики повторяемость вопросов (x_i -их номера) была следующая:

x_i -номер билета	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6
n_i -частота выпадания билета	9	I2	I3	I0	I0	8	7	I4	I0	II	I2	I4	I2	I0	9	8

x_i -номер билета	I7	I8	I9	20	2I	22	23	23	24	25	26	27	28	29	30
n_i -частота выпадания билета	8	I5	II	I4	I0	I0	I0	I2	II	I2	I0	I4	I0	9	I2

Равна ли вероятность выпадания любого билета (равномерное распределение), нет ли случайности в распределении частот. (Использовать критерий λ -Колмогорова-Смирнова).

№ 21. В спортивном молодежном лагере подсчитали калорийность питания за 7 дней; получили, что среднее значение калорийности равно 3760 калорий, среднее квадратическое отклонение составило σ_x = 321 кал. Определить, значимо ли различаются средние значения калорийности питания, полученной из проверки и нормы с вероятностью 0,95 (норма составляла 4000 калорий в сутки).

№ 22. Измеряли верхнее артериальное давление у 200 мужчин и 250 женщин одного возраста и получили следующие результаты:
мужчины: $\bar{x}_1$ = 140,0; v_1 = 13,6%
женщины: $\bar{x}_2$ = 130,0; v_2 = 11,2%

Определить, существует ли статистически достоверное различие артериального давления между мужчинами и женщинами при уровне значимости α = 0,05.

№ 23. Для проверки новой методики тренировки, отрабатывающей точность удара в футболе, случайным образом отобрали из основной группы (N = 125) - экспериментальную группу (n_1= 65), которая год занималась по новой методике. Результаты точности удара оценивались в очках:

а) определить минимальную численность экспериментальной группы, если точность оценки должна составить 1 очко, а уровень значимости принятия нуль-гипотезы 5% (т.е. средний результат должен находиться в интервале $\pm$ 0,5 очка с вероятностью 0,95);

б) результаты 65 футболистов экспериментальной группы через год тренировки составили:

8.0	10.0	12.5	14.5	7.0	8.5	11.0	11.5	12.0	12.5
13.0	15.5	9.5	10.5	13.5	14.0	11.0	11.0	11.5	12.5
12.0	9.5	11.0	11.0	12.5	11.0	11.0	13.0	16.0	11.5
12.5	12.0	13.0	14.0	15.0	8.0	9.0	10,5	11.0	12.5
12.0	13.0	14.5	15.0	11.0	12.0	13.0	14.0	13.5	9.0
14.0	12.0	11.0	11.5	10.0	10.0	10.5	8.0	10.5	12.0
13.0	11.0	10.0	9.5	10.5					

Проверьте достоверность среднего значения экспериментальной группы с точностью 25% (доверительный интервал (I) не должен превосходить одно очко при σ = 2 очка).

в) аналогично проверьте данные контрольной группы (n_2 = 60), тренировавшейся по старой методике, где были получены следующие данные:

$\bar{x}_2$ = 7,980 очка

σ_{x_2} = 3,3 очка

m_{x_2} = 0,46 очка

г) оценить достоверность различия между экспериментальной группой и контрольной при уровне значимости 1%.

Сформулируйте нуль-гипотезу.

№ 24. Результаты легкоатлетов (тройной прыжок) в беге на 100 м X (с), прыжке в длину У (м) в тройном прыжке (м) следующие:

X:	11,7	11,6	11,7	11,5	11,9	11,4	11,3	11,7	11,7
У:	6,90	6,90	6,94	6,74	6,72	6,94	7,07	7,05	6,67
z:	14,38	14,27	14,22	14,12	14,12	14,09	14,03	14,02	14,00

Определить достоверность множественного коэффициента корреляции $R_{x \cdot yz}$ и коэффициентов корреляции r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}.

№ 25. У 70 легкоатлетов определили зависимость изменения спортивного результата (I) и от объема тренировок (II), и от интенсивности тренировок (III), коэффициенты корреляции соответственно равны:

r_{12} = 0,48 r_{13} = 0,63 r_{23} = 0,25

Определить достоверность парных коэффициентов корреляции и множественного коэффициента корреляции $R_{1 \cdot (23)}$ при уровне значимости 0,05.

№ 26. У двух групп тяжелоатлетов (их собственные веса 60 кг и 63 кг) измерили результат в жиме:

I гр.	70	71	72	76	76	77	77	78	80	80	81	81
II гр.	71	71	74	75	76	76	80	81	81	83	86	87

Оценить достоверность различия между I и II группами, используя критерий Уайта.

№ 27. Была измерена величина легочной вентиляции (л/мин) у пяти групп спортсменов, в каждую группу входило по 4 испытуемых (табл. 9).

1-я специализация - фехтование, 2-я - плавание, 3-я - стрельба, 4-я - гимнастика, 5-я - л/атл.

Таблица 9

№№ испытуемых / №№ групп	I	II	III	IV	V
1	42	66	35	64	70
2	55	91	50	70	79
3	67	96	60	79	88
4	67	98	69	81	90
$\bar{X}$	57,75	87,75	53,5	73,5	81,75

Определить достоверность различия между 1 и 2, 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 5 группами, используя критерий Вилкоксона и определить достоверность различия между средними $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$, $\bar{X}_2$ и $\bar{X}_3$, $\bar{X}_3$ и $\bar{X}_4$, $\bar{X}_4$ и $\bar{X}_5$, используя критерий Стьюдента.

№ 28. Произведены измерения прыжков в высоту с места у волейболистов I разряда (n_1 = 250) и у волейболистов II разряда (n_2 = 250), результаты приведены в табл. 10.

Таблица 10

X (см)	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
I разряд	3	4	7	9	13	18	27	42	35	22	20	18	15	10	7
II разряд	5	8	10	22	38	40	40	23	18	16	14	10	3	2	1

Определить, достоверно ли различаются данные группы волейболистов по такому показателю, как прыжки в высоту, используя критерий λ -Колмогорова-Смирнова.

XVI. Основные формулы

1. Средняя арифметическая:

$$\bar{x} = 1/n \, \Sigma x$$

2. Среднее квадратическое отклонение σ (сигма):

$$\sigma = \sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 n_i / n} \qquad \text{при } n > 100$$

$$\sigma = \sqrt{\Sigma (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i / (n-1)} \qquad \text{при } n < 100$$

3. Коэффициент вариации v

$$v = (\sigma / \bar{x}) \cdot 100\%$$

4. Нормированное отклонение варианты от средней арифметической:

$$t = (x - \bar{x}) / \sigma.$$

5. Средняя ошибка средней арифметической:

$$m_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n} \quad \text{или} \quad m_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n-1}$$

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{(\Sigma x^2/n - \bar{x}^2)/(n-1)}\ .$$

6. Средняя ошибка медианы:

$$m_{Me} = 1,2533\,\sigma / \sqrt{n}$$

7. Средняя ошибка коэффициента вариации:

$$m_v = \frac{v}{\sqrt{2n}} \cdot \sqrt{1 + 2(v/100)^2}$$

8. Средняя ошибка среднего квадратического отклонения:

$$m_\sigma = \sigma / \sqrt{2n}.$$

9. Средняя ошибка коэффициента корреляции:

$$m_r = 1 - r^2/\sqrt{n} \quad , n > 100.$$

$$m_r = \sqrt{1 - r^2} / \sqrt{n-2} \ , \quad n < 100.$$

10. Средняя ошибка коэффициента ранговой корреляции:

$$m_{r_s} = 1 - r_s / \sqrt{n-1}$$

11. Средняя ошибка показателя Z :

$$m_z = 1 / \sqrt{n-3}$$

12. Средняя ошибка корреляционного отношения:

$$m_\eta = \sqrt{1-\eta^2} / \sqrt{n-2} . \qquad n < 100.$$

13. Доверительный интервал, в который заключена величина генеральной средней M .

$$\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n} \le M \le \bar{x} + t \cdot \sigma / \sqrt{n}$$

14. Критерий достоверности различий между средними двух независимых - выборок:

$$t_{н.} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 / \sqrt{m^2_{\bar{x}_1} + m^2_{\bar{x}_2}} \qquad (1)$$

$$t_{н.} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 / \sqrt{\frac{\sigma_1^2 (n_1 - 1) + \sigma_2^2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}} \; ; (2)$$

(2) — для малых выборок

15. Критерий достоверности различий между вариантами зависимых выборок:

$$t_{н.} = \frac{\Sigma (x_{1i} - x_{2i}) \cdot \sqrt{n-1}}{n \; \sigma d} \quad , \text{ где } d_i = x_{1i} - x_{2i}$$

16. Критерий достоверности коэффициента корреляции:

$$t_{н.} = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

17. Критерий достоверности различий между коэффициентами корреляции r_1 и r_2 .

$$t_{н.} = \frac{Z_1 - Z_2}{\sqrt{1/n_1 - 3 + 1/n_2 - 3}};$$

где $Z = 1/2 \ln[(1+r)/(1-r)]$

I8. Критерий Фишера:

$$F_{н.} = \frac{\sigma^2_{большая}}{\sigma^2_{меньшая}}.$$

I9. Критерий соответствия ламбда (λ)-Колмогорова-Смирнова:

$$\lambda = d_{max}/\sqrt{n} \; ; \; \lambda = d_{max} \cdot \sqrt{n_1 \cdot n_2 / n_1 + n_2}$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. М., Изд.иностр.лит. I960.

2. Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М., "Статистика", I974.

3. Бейли Н. Статистические методы в биологии. М., "Мир", I963.

4. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. М., "Наука", I973.

5. Лакин Г.Ф. Биометрия. М., "Высшая школа", I973.

6. Масальгин Н.А. Математико-статистические методы в спорте. М., "Физкультура и спорт", I974.

7. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистика. Минск, БГУ, I968.

8. Фишер Р.А. Статистические методы для исследователей. М., Госиздат, I958.

9. Кендалл М.Дж. Теория статистики. М., Госстатиздат, I960.

Приложение

Таблица I

Критические значения критерия t -Стьюдента
(k - число степеней свободы)

	Уровни значимости α								
k	0,I	0,05	0,0I	0,0II	k	0,I	0,05	0,0I	0,00I
I	6,3I4	I2,706	63,657	636,6I9	2I	I,72I	2,080	2,83I	3,8I9
2	2,920	4,303	9,925	3I,599	22	I,7I7	2,074	2,8I9	3,792
3	2,353	3,I82	5,84I	I2,924	23	I,7I4	2,069	2,807	3,768
4	2,I32	2,776	4,604	8,6I0	24	I,7II	2,064	2,797	3,745
5	2,0I5	2,57I	4,032	6,869	25	I,708	2,060	2,787	3,725
6	I,943	2,447	3,707	5,959	26	I,706	2,056	2,779	3,707
7	I,895	2,365	3,499	5,408	27	I,703	2,052	2,77I	3,690
8	I,860	2,306	3,355	5,04I	28	I,70I	2,048	2,763	3,674
9	I,833	2,262	3,250	4,78I	29	I,699	2,045	2,756	3,659
I0	I,8I2	2,228	3,I69	4,587	30	I,697	2,042	2,750	3,646
II	I,796	2,20I	3,I06	4,437	40	I,684	2,02I	2,704	3,55I
I2	I,782	2,I79	3,055	4,3I8	50	I,676	2,009	2,678	3,505
I3	I,77I	2,I60	3,0I2	4,22I	60	I,664	2,000	2,660	3,505
I4	I,76I	2,I45	2,977	4,I40	80	I,664	I,990	2,639	3,4I6
I5	I,753	2,I3I	2,947	4,073	I00	I,650	I,984	2,626	3,39I
I6	I,746	2,I20	2,92I	4,0I5	I20	I,658	I,980	2,6I7	3,373
I7	I,740	2,II0	2,898	3,965	200	I,653	I,972	2,60I	3,340
I8	I,734	2,I0I	2,878	3,922	500	I,648	I,965	2,586	3,3I0
I9	I,729	2,093	2,86I	3,883	∞	I,645	I,960	2,580	3,29I
20	I,725	2,086	2,845	3,850					
	0,9	0,95	0,99	0,999		0,9	0,95	0,99	0,999

Доверительные уровни

Таблица составлена по Л.Н.Большеву и Н.В.Смирнову. I968; М. Дж.Кендаллу и А.М.Стьюарту, I973.

Таблица II

Значения Z (зет), соответствующие величинам коэффициента корреляции

r	Сотые доли									
	0	I	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,0I0	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
0,I	0,I00	0,III	0,I2I	0,I3I	0,I4I	0,I5I	0,I6I	0,I72	0,I82	0,I92
0,2	0,203	0,2I3	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
0,3	0,3I0	0,32I	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,4I2
0,4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,498	0,5I0	0,523	0,536
0,5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,6I8	0,633	0,648	0,663	0,678
0,6	0,693	0,709	0,725	0,74I	0,758	0,776	0,793	0,8II	0,829	0,848
0,7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,95I	0,973	0,996	I,020	I,045	I,07I
0,8	I,099	I,I27	I,I57	I,I88	I,22I	I,256	I,293	I,333	I,376	I,422
0,9	I,472	I,528	I,589	I,658	I,738	I,832	I,946	2,092	2,298	2,647
0,99	2,647	2,700	2,759	2,826	2,903	2,995	3,I06	3,250	3,453	3,800

Таблица Ш

Значения коэффициента корреляции по числу z от 0,00 до 4,9

z	Сотые доли									
	0,00	0,0I	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0000	0I00	0200	0300	0400	0500	0599	0699	0708	0898
0,I	0997	I096	II94	I293	I39I	I489	I586	I694	I78I	I877
0,2	I974	2070	2I65	2260	2355	2449	2543	2636	2729	282I
0,3	29I3	3004	3095	3I85	3275	3364	3452	3540	3627	37I4
0,4	3800	3885	3969	4053	4I36	42I9	430I	4382	4462	4542
0,5	462I	4699	4777	4854	4930	5005	5080	5I54	5227	5299
0,6	5370	544I	55II	5580	5649	57I7	5784	5850	59I5	5980
0,7	6044	6I07	6I69	623I	629I	635I	64II	6469	6527	6584
0,8	6640	6696	675I	6805	6958	69II	6963	70I4	7064	7II4
0,9	7I63	72II	7259	7306	7352	7398	7443	7447	753I	7574
I,0	76I6	7658	7699	7739	7779	78I8	7857	7895	7932	7969
I,I	8005	804I	8076	8II0	8I44	8I78	82I0	8243	8275	8306
I,2	8337	8367	8397	8426	8455	8483	85II	8538	8565	859I
I,3	86I7	8643	8668	8692	87I7	874I	8764	8787	88I0	8832
I,4	8854	8875	8896	89I7	8937	8957	8977	8996	90I5	9033
I,5	905I	9069	9087	9I04	9I2I	9I38	9I54	9I70	9I96	920I
I,6	92I7	9232	9246	926I	9275	9289	9302	93I6	9329	934I
I,7	9354	9366	9379	939I	9402	94I4	9425	9436	9447	9458
z	0,00	0,0I	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
I,8	9468I	94783	94884	94982	95080	95I75	95268	95259	95449	95537
I,9	95624	95709	95792	95873	95953	96032	96I09	96I85	96250	9633I
2,0	96403	96473	9654I	96609	96675	96733	96803	96865	96926	96986
2,I	97045	97I03	97I59	972I5	97269	97323	97375	97426	97477	97526
2,2	97574	97622	97668	977I4	97759	97803	97846	97888	97929	97970
2,3	980I0	98049	98087	98I24	98I6I	98I97	98233	98267	9830I	98335
2,4	98367	98399	9843I	98462	98492	99522	9855I	98579	98607	98635
2,5	9866I	98688	987I4	98739	98764	98788	988I2	99835	98858	9888I
2,6	98903	98924	98945	98966	98987	99007	990I2	99045	99064	99083
2,7	99I0I	99II8	99I36	99I53	99I70	99I86	99202	992I8	99233	99248
2,8	99263	99278	99292	99306	99320	99333	99346	99359	99372	99384
2,9	99396	99408	99420	9943I	99443	99454	99464	99475	99485	99495
	0,00	0,0I	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
3	99505	99595	99668	99728	99777	998I8	9985I	99878	99900	999I8
4	99933	99945	99955	99963	99970	99975	99980	99983	99986	99989

П р и м е ч а н и е: в значениях z опущены ноль и запятая.
Таблица составлена по E. Weber., 1972.

F -критерий для уровня

K_2 \ K_I	I	2	3	4	5	6	7	8
I	I6I	200	2I6	225	230	234	237	239
2	I8,5	I9,0	I9,2	I9,2	I9,3	I9,3	I9,4	I9,4
3	I0,I	9,6	9,3	9,I	9,0	8,9	8,9	8,8
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,I	6,0
5	6,6I	5,79	5,4I	5,I9	5,05	4,95	4,88	4,82
6	5,99	5,I4	4,76	4,53	4,39	4,28	4,2I	4,I5
7	5,59	4,74	4,35	4,I2	3,97	3,87	3,79	3,73
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
9	5,I2	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3.23
I0	4,96	4,I0	3,7I	3,48	3,33	3,22	3,I4	3,07
I2	4,75	3,88	3,49	3,26	3,II	3,00	2,92	2,85
I4	4,60	3,74	3,34	3,II	2,96	2,85	2,77	2,70
I6	4,49	3,63	3,24	3,0I	2,85	2,74	2,66	2,59
I8	4,4I	3,55	3,I6	2,93	2,77	2,66	2,58	2,5I
20	4,35	3,49	3,I0	2,87	2,7I	2,60	2,52	2,45
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,4I	2,34
30	4,I7	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27
40	4,08	3.23	2,84	2.6I	2,45	2,34	2,25	2,I8
50	4,03	3,I8	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,I3
I00	3,94	3,09	2.70	2,46	2,30	2,I9	2,I0	2,03
	3,84	2,99	2,60	2,37	2,2I	2,09	2,0I	I,94

Таблица IУ

значимости $\alpha = 0.05$

9	I0	II	I2	I4	I6	20	24	30	
24I	242	243	244	245	246	248	249	250	254
I9,4	I9,4	I9,4	I9,4	I9,4	I9,4	I9,4	I9,5	I9,5	I9,5
8,8	8,8	8,8	8,7	8,7	8,7	8,7	8,6	8,6	8,5
6,0	6,0	5,9	5,9	5,9	5,8	5,8	5,8	5,7	5,6
4,78	4,74	4,70	4,68	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,36
4,I0	4,06	4,03	4,00	3,96	3,92	3,87	3,84	3,8I	3,67
3,68	3,63	3,60	3,57	3,52	3,49	3,44	3,4I	3,38	3,23
3,39	3,34	3,3I	3,28	3,23	3,20	3,I5	3,I2	3,08	2,93
3,I8	3,I3	3,I0	3,07	3,02	2,98	2,93	2,90	2,86	2,7I
3,02	2,97	2,94	2,9I	2,86	2,82	2,77	2,74	2,70	2,54
2,80	2,76	2,72	2,69	2,64	2,60	2,54	2,50	2,46	2,30
2,65	2,60	2,56	2,53	2,48	2,44	2,39	2,35	2,3I	2,I3
2,54	2,49	2,45	2,42	2,37	2,33	2,28	2,24	2,20	2,0I
2,46	2,4I	2,37	2,34	2,29	2,25	2,I9	2,I5	2,II	I,92
2,40	2,35	2,3I	2,28	2,23	2,I8	2,I2	2,08	2,04	I,84
2,28	2,24	2,20	2,I6	2,II	2,06	2,00	I,96	I,92	I,7I
2,2I	2,I6	2,I2	2,09	2,04	I,99	I,93	I,89	I,84	I,62
2,I2	2,07	2,04	2,00	I,95	I,90	I,84	I,79	I,74	I,5I
2,07	2,02	I,98	I,95	I,90	I,85	I,78	I,74	I,69	I,44
I,97	I,92	I,88	I,85	I,79	I,75	I,68	I,63	I,57	I,28
I,88	I,83	I,79	I,75	I,69	I,64	I,57	I,52	I,46	I,00

Таблица У

Значение критерия Уайта при Р=0,95

Большое число наблюдений	Меньшее число наблюдений													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4			10											
5		6	11	17										
6		7	12	18	26									
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	4	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					

Таблица УI

Критические значения Вилкоксона для сопряженных пар

Число парных наблюдений	Уровни значимости	
	0,05	0,0I
6	I	0
7	2	0
8	4	0
9	6	2
I0	8	3
II	II	5
I2	I4	7
I3	I7	I0
I4	2I	I3
I5	25	I6
I6	30	20
I7	35	23
I8	40	28
I9	46	32
20	52	38
2I	59	43
22	66	49
23	73	55
24	8I	6I
25	89	68

О Г Л А В Л Е Н И Е

I. Генеральная и выборочная совокупность 3

II. Средние ошибки статистик 5

III. Статистическая проверка гипотез. 6

IУ. Доверительный интервал 9

У. Оценка достоверности различия средних двух выборочных совокупностей 10

УI. Оценка достоверности различия средних двух независимых выборочных совокупностей 11

УII. Оценка достоверности различия между вариантами двух зависящих выборочных совокупностей. 14

УIII. Проверка достоверности коэффициента корреляции

IX. Показатель 16

X. Критерий Фишера 18

XI. Непараметрические критерии. 21

XII. Критерий Колмогорова-Смирнова 21

XIII. Критерий Уайта 23

XIУ. Критерий Вилкоксона. 25

XУ. Задачи 26

XУI. Основные формулы 33

Литература 36

Приложение 37

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ "СТАТИСТИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ"

Методические разработки для студентов
институтов физической культуры

Редактор И. Дубнова. Корректоры А. Домбровская,
Н. Ушакова.

Объем 2,8 авт.л. Тираж 1000 экз. Зак. 1201

Издание Редакционно-издательского отдела ГЦОЛИФКа.

Типография В/о "Союзспортобеспечение".
Москва, Мичуринский проспект, 40.