УДК 517.53

М. В. Заболоцький, М. Р. Мостова (Львів. нац. ун-т ім. І. Франка)

ЛОГАРИФМІЧНА ПОХІДНА І КУТОВА ЩІЛЬНІСТЬ НУЛІВ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

For an entire function of zero order, we establish the relationship between the angular density of zeros, the asymptotic of logarithmic derivative, and the regular growth of its Fourier coefficients.

Для целых функций нулевого порядка установлена связь между угловой плотностью нулей, асимптотикой логарифмической производной и регулярным ростом ее коэффициентов Фурье.

1. Вступ. Позначимо через $H_+(\rho(r))$ клас цілих функцій f скінченного додатного порядку ρ, $\rho(r)$ — уточнений порядок f (див., наприклад, [1, с. 69]). Множину $E \subset \mathbb{C}$ будемо називати C_0^α-множиною $(0 < \alpha \leq 2)$ і писати $E \in C_0^\alpha$, якщо її можна покрити послідовністю кругів $\{z\colon |z - z_k| < r_k\}$ таких, що $\sum_{|z_k| \leq r} r_k^\alpha = o(r^\alpha),\ r \to +\infty$. Зауважимо, що промінь є C_0^α-множиною для $1 < \alpha \leq 2$.

В 30-х роках минулого століття Б. Я. Левін і А. Пфлюгер побудували теорію цілих функцій цілком регулярного зростання (ц. р. зр.). Ціла функція $f \in H_+(\rho(r))$ називається функцією ц. р. зр., якщо для всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$ існує границя

$$\lim_{z\to\infty}{}^{*} \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} = h(\varphi, f).$$

Тут $\lim^*{}_{z\to\infty}$ означає, що $z = re^{i\varphi} \to \infty$, $z \notin E$, де E — деяка C_0^1-множина. Клас цілих функцій ц. р. зр. позначимо через $H_+^*(\rho(r))$. Знайдено багато необхідних і достатніх умов належності цілої функції до класу $H_+^*(\rho(r))$, зокрема:

1) нулі $f \in H_+(\rho(r))$ правильно розподілені, що у випадку нецілого порядку ρ еквівалентно існуванню границі [2] (розділи 2, 3)

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{r^{\rho(r)}}$$

для всіх α, β, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$, за винятком, щонайбільше, зліченної кількості значень α і β, де $n(r, \alpha, \beta)$ — число нулів у секторі $\{z\colon |z| \leq r,\ \alpha \leq \arg z < \beta\}$;

2) для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існують границі [3]

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{c_k(r, \ln|f|)}{r^{\rho(r)}} = c_k,$$

де $c_k(r, \ln|f|)$ — коефіцієнти Фур'є функції $\ln|f(re^{i\varphi})|$, $f \in H_+(\rho(r))$;

3) для довільного $p \in [1, +\infty)$ [4, с. 78]

$$\left\| \frac{\ln|f(re^{i\varphi})|}{r^{\rho(r)}} - h(\varphi, f) \right\|_p \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

де $\|\cdot\|_p$ — p-норма у просторі $L^p[0, 2\pi]$, $f \in H_+(\rho(r))$;

4) існують функція $g \in L^1[0, 2\pi]$ і множина $E \in C_0^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$, такі, що [5, 6]

$$F(re^{i\varphi}) = g(\varphi) r^{\rho(r)} + o(r^{\rho(r)}), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E,$$

де $F(z) = zf'(z)/f(z)$, $f \in H_+(\rho(r))$;

5) для всіх цілих k існують границі [6]

$$\lim_{r\to+\infty}{}^{*} \frac{c_k(r,F)}{r^{\rho(r)}} = d_k,$$

де $c_k(r,F)$ — коефіцієнти Фур'є функції $F(re^{i\varphi})$, а $\lim^*{}_{r\to+\infty}$ означає, що $r \to +\infty$, $r \notin D$, D — E_0-множина, тобто $D \subset \mathbb{R}_+$ — вимірна множина і $\mathrm{mes}(D \cap [0,r]) = o(r)$, $r \to +\infty$;

6) існують функція $g \in L^1[0,2\pi]$ і множина $G \in \mathcal{E}_\eta$, $0 < \eta \le 1$, такі, що для довільного $p \in [1,+\infty)$ [7]

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{r^{\rho(r)}} - g(\varphi) \right\|_p \to 0, \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin G,$$

де $\mathcal{E}_\eta$ — сім'я вимірних множин $G \subset \mathbb{R}_+$ таких, що $\overline{\lim}_{r\to+\infty} \mathrm{mes}(G \cap [0,r])/r \le \eta$.

Якщо для цілої функції нульового порядку аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то отримана теорія буде тривіальною. Справді, як показано у [8], для цілої функції f нульового порядку $\Delta(\alpha,\beta) = 0$ для довільних α і β, $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$, і існує множина $E \in C_0^1$ така, що

$$\ln|f(re^{i\varphi})| = N(r,0,f) + o(r^{\rho(r)}), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E,$$

де $N(r,0,f) = N(r) = \displaystyle\int_1^r n(t,0,2\pi)/t\, dt$. Звідси бачимо, що ц. р. зр. функції f не залежить від аргументів її нулів, а тільки від їх модулів. Тому в [9] було введено поняття сильно регулярного зростання (с. р. зр.) для класу $H_0(\lambda(r))$ цілих функцій нульового порядку, яке має властивості, подібні до властивостей цілих функцій ц. р. зр. Тут $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок лічильної функції $n(r) = n(r,0,2\pi)$ нулів f такий, що $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty$ при $r \to +\infty$.

В роботі ми встановлюємо зв'язки між існуванням кутової щільності нулів функцій $f \in$ $\in H_0(\lambda(r))$ і умовами, аналогічними до умов 4 – 6. Зв'язок між с. р. зр. цілих функцій класу $H_0(\lambda(r))$ і умовами, аналогічними до умов 1 – 3, знайдено в роботах [10, 11].

2. Означення та формулювання основних результатів. Додатні, неспадні, необмежені, неперервно диференційовні на $\mathbb{R}_+$ функції будемо називати функціями зростання. Функції υ і $\widetilde{\upsilon}$ такі, що $\upsilon(r) \sim \widetilde{\upsilon}(r)$, $r \to +\infty$, вважатимемо еквівалентними і будемо ототожнювати. Клас функцій зростання υ, для яких $r\upsilon'(r)/\upsilon(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, позначимо через $\mathcal{L}$. Відомо [12, с. 15], що з точністю до еквівалентних функцій клас $\mathcal{L}$ збігається з класом повільно зростаючих функцій. Позначимо через $\mathcal{H}_0(\upsilon)$, $\upsilon \in \mathcal{L}$, клас цілих функцій f нульового порядку, для яких $0 < \Delta = \overline{\lim}_{r\to+\infty} n(r)/\upsilon(r) < +\infty$. Легко переконатися, що $r^{\lambda(r)} \in \mathcal{L}$, де $\lambda(r)$ — нульовий уточнений порядок $n(r)$, і $H_0(\lambda(r)) = \mathcal{H}_0(r^{\lambda(r)})$. Не втрачаючи загальності вважатимемо, що $f(0) = 1$.

Будемо говорити, що нулі $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$ мають кутову (усереднену кутову) υ-щільність, $\upsilon \in \mathcal{L}$, якщо існує границя

$$\Delta(\alpha,\beta) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} \qquad \left(\widetilde{\Delta}(\alpha,\beta) = \lim_{r\to+\infty} \frac{N(r,\alpha,\beta)}{\upsilon(r)} \right),$$

коли α і β не належать деякій не більш ніж зліченній множині з $[0,2\pi]$. Тут

$$N(r,\alpha,\beta)=\int\limits_1^r \frac{n(t,\alpha,\beta)}{t}dt.$$

Для $\upsilon\in\mathcal{L}$ приймемо

$$\upsilon_1(r)=\int\limits_1^r \frac{\upsilon(t)}{t}dt, \qquad \upsilon_2(r)=\int\limits_1^r \frac{\upsilon_1(t)}{t}dt.$$

Легко переконатися, що $\upsilon_1,\,\upsilon_2\in\mathcal{L}$, $\upsilon(r)=o(\upsilon_1(r))$, $\upsilon_1(r)=o(\upsilon_2(r))$, $r\to+\infty$.

Теорема 1. *Нехай $\upsilon\in\mathcal{L},\ f\in\mathcal{H}_0(\upsilon)$, нулі f мають кутову υ-щільність. Тоді існує множина $E\in C_0^\alpha,\ 1<\alpha\le 2$, така, що*

$$F(re^{i\varphi})=\Delta\upsilon(r)+o(\upsilon(r)), \qquad z\to\infty, \qquad z\notin E. \tag{1}$$

***Зауваження* 1.** У випадку $\upsilon(r)=r^{\lambda(r)}$ теорему 1 доведено в [13].

***Зауваження* 2.** Обернене твердження до теореми 1 не є правильним. У пункті 5 буде побудовано приклад цілої функції $f\in\mathcal{H}_0(\upsilon),\ \upsilon(r)=2^{\sqrt{2\ln r}}\in\mathcal{L}$, такої, що $F(z)=n(r)+o(1)$, $z\to\infty,\ z\notin E$, де E — деяка C_0^2-множина і нулі f не мають кутової υ-щільності.

Теорема 2. *Нехай $\upsilon\in\mathcal{L},\ f\in\mathcal{H}_0(\upsilon)$ і виконується співвідношення* (1). *Тоді для $k\in\mathbb{Z}$ існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)}=\Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}=0, \qquad k\ne 0. \tag{2}$$

Теорема 3. *Нехай $\upsilon\in\mathcal{L},\ f\in\mathcal{H}_0(\upsilon)$ і для $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ виконуються співідношення* (2). *Тоді існує множина $G\in\mathcal{E}_\delta,\ 0<\delta<1$, така, що для довільного $p\in[1,+\infty)$*

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})-n(r)}{\upsilon(r)}\right\|_p\to 0, \qquad r\to+\infty, \qquad r\notin G.$$

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми* 3 *і* $n(r)\sim\Delta\upsilon(r)$, $r\to+\infty$. *Тоді існує множина $G\in\mathcal{E}_\delta,\ 0<\delta<1$, така, що для $p\in[1,+\infty)$*

$$\left\|\frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)}-\Delta\right\|_p\to 0, \qquad r\to+\infty, \qquad r\notin G.$$

Теорема 4. *Нехай $\upsilon\in\mathcal{L},\ f\in\mathcal{H}_0(\upsilon)$ і існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)}=\Delta, \qquad \lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{c_k(r,F)}{r\upsilon'(r)}=l_k, \qquad k\ne 0. \tag{3}$$

Тоді нулі f мають усереднену кутову υ_1-щільність.

Теорема 5. *Нехай $\upsilon\in\mathcal{L},\ r\upsilon'(r)\nearrow+\infty$ при $r\to+\infty$, функція* $\ln\upsilon$ *вгнута щодо логарифма, $f\in\mathcal{H}_0(\upsilon)$. Наступні твердження є еквівалентними*:

А) *нулі f мають кутову υ-щільність;*

Б) *існують границі* (3).

3. Допоміжні твердження. При доведенні основних теорем ми будемо використовувати допоміжні твердження, які сформулюємо у вигляді лем. Через $K, K_1, K_2, \ldots$ далі позначатимемо додатні сталі.

Лема 1. *Нехай $\upsilon \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$, (a_n) — послідовність нулів f, занумерованих у порядку неспадання їх модулів. Тоді*

$$\left|\frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})}\right| \le K\frac{\upsilon(r)}{r} + \sum_{\frac{r}{2}\le|a_n|\le 2r}\frac{1}{|z-a_n|}.$$

Доведення. Покладемо $\Sigma_1 = \sum_{r/2\le|a_n|\le 2r}\dfrac{1}{|z-a_n|}$. Тоді $f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{z}{a_n}\right)$ і

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z-a_n}\right| \le \sum_{|a_n|\le r/2}\frac{1}{r-|a_n|} + \sum_{|a_n|\ge 2r}\frac{1}{|a_n|-r} + \Sigma_1 =$$

$$= \int_0^{r/2}\frac{dn(t)}{r-t} + \int_{2r}^{+\infty}\frac{dn(t)}{t-r} + \Sigma_1 \le \frac{2}{r}n\left(\frac{r}{2}\right) + \int_{2r}^{+\infty}\frac{n(t)}{(t-r)^2}dt + \Sigma_1 \le$$

$$\le \frac{2}{r}n(r) + K_1\int_{2r}^{+\infty}\frac{\upsilon(t)}{t^2}dt + \Sigma_1 \le \frac{2}{r}n(r) + K_1\frac{\upsilon(2r)}{\sqrt{2r}}\int_{2r}^{+\infty}t^{-3/2}dt + \Sigma_1 \le$$

$$\le \frac{2}{r}n(r) + K_2\frac{\upsilon(r)}{r} + \Sigma_1 \le K\frac{\upsilon(r)}{r} + \Sigma_1,$$

оскільки $n(r) \le K\upsilon(r)$, $\upsilon(r)/\sqrt{r} \searrow 0$, $r \to +\infty$.

Лема 2. *Нехай $\upsilon \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$, $E(t)$ — підмножина $[0, 2\pi]$, міра якої не перевищує θ, $0 < \theta \le 2\pi$. Тоді*

$$\int_{r/2}^{r}dt\int_{E(t)}\left|\frac{f'(te^{i\varphi})}{f(te^{i\varphi})}\right|d\varphi \le K\upsilon(r)\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\theta}\right)\right).$$

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 4 з [9].

Нехай $a_k = r_k e^{i\alpha_k}$ — нулі функції $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$. Покладемо

$$n_k(r) = \sum_{|a_j|\le r} e^{-ik\alpha_j}, \qquad N_k(r) = \int_{|a_1|}^{r}\frac{n_k(t)}{t}dt, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Лема 3. *Нехай $\upsilon \in \mathcal{L}$, $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$. Тоді*

$$c_k(r, F) = n_k(r) - kr^k\int_r^{+\infty}\frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$c_k(r,F) = n_k(r) + kr^k \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt, \qquad k \in \mathbb{Z}_-, \tag{5}$$

$$c_0(r,F) = n_0(r) = n(r), \tag{6}$$

$$|c_k(r,F)| \leq K\upsilon(r), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай $\ln f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k z^k$ — розвинення в деякому околі точки $z = 0$. Враховуючи [4, с. 60], що для цілої функції порядку $\rho \geq 0$ маємо ($\gamma_k = 0$ для $k \leq 0$)

$$\gamma_k = -\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{a_j^k}, \qquad k \geq [\rho]+1,$$

з формул (див., наприклад, [7])

$$c_k(r,F) = k\gamma_k r^k + \sum_{|a_j|\leq r}\left(\frac{r}{a_j}\right)^k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

інтегруванням частинами отримуємо співвідношення (4)–(6). Оскільки $|n_k(r)| \leq n(r) \leq$ $\leq K\upsilon(r)$,

$$|k|r^k \int\limits_0^r \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}}dt \leq |k|r^k\upsilon(r)\int\limits_0^r t^{-k-1}dt \leq K\upsilon(r) \quad \text{для} \quad k \leq -1,$$

$$kr^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{\upsilon(t)}{t^{k+1}}dt \leq kr^k\frac{\upsilon(r)}{\sqrt{r}}\int\limits_r^{+\infty} t^{-k-1/2}dt \leq K\upsilon(r) \quad \text{для} \quad k \geq 1,$$

то з (4)–(6) отримуємо (7).

Лема 4. *Нехай* $1 < \gamma \leq 2,\ \upsilon \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$. *Тоді існує множина* $G \in \mathcal{E}_{\gamma-1}$ *така, що для* $|k| \geq 2$

$$|c_k(r,F)| \leq K\upsilon(r)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}} + \frac{1}{|k|(\gamma-1)}\right), \qquad r \notin G.$$

Доведення леми 4 аналогічне доведенню теореми 1 з [14] з урахуванням нерівності (7).

Лема 5. *Нехай* $\upsilon \in \mathcal{L},\ f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$. *Тоді*

$$N_k(r) = \int\limits_0^r \frac{c_k(t,F)}{t}dt - k\int\limits_0^r \frac{dt}{t}\int\limits_0^t \frac{c_k(\tau,F)}{\tau}d\tau. \tag{8}$$

Доведення. Оскільки $F(re^{i\varphi}) = r\dfrac{\partial}{\partial r}\ln f(re^{i\varphi})$, то

$$\int\limits_0^r \frac{c_k(t,F)}{t}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r \frac{dt}{t}\int\limits_0^{2\pi} F(te^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^r dt\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\ln f(te^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln f(re^{i\varphi}) e^{-ik\varphi} d\varphi = c_k(r, \log f).$$

Звідси і з співвідношення [15]

$$N_k(r) = c_k(r, \log f) - k \int\limits_0^r \frac{c_k(t, \log f)}{t} dt$$

отримуємо (8).

Лема 6. *Нехай функція g неперервно диференційовна, опукла на $[0, +\infty)$, $g'(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ і $\ln g(x)$ — вгнута функція. Тоді для довільної опуклої функції f з існування границі*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R}$$

випливає існування границі

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Твердження цієї леми випливає з теорем 5 і 6 роботи [16].

Позначимо через $\mathcal{L}^*$ підклас функцій $v \in \mathcal{L}$ таких, що $rv'(r)/v(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$.

Лема 7. *Нехай $v \in \mathcal{L}^*$, $f \in \mathcal{H}_0(v)$. Тоді існування кутової v-щільності нулів f еквівалентно існуванню їх усередненої кутової v_1-щільності.*

Доведення. Завдяки правилу Лопіталя з існування кутової v-щільності нулів отримуємо існування усередненої кутової v_1-щільності для довільної функції $v \in \mathcal{L}$.

Якщо $v \in \mathcal{L}^*$, то $\ln v_1$ — вгнута відносно логарифма на $[1, +\infty)$ функція [11]. Згідно з лемою 6, з існування усередненої кутової v_1-щільності випливає існування кутової v-щільності.

4. Доведення основних результатів. Доведення теореми 1 аналогічне доведенню теореми 2 з [13], оскільки при її доведенні використовуються дві властивості нульового уточненого порядку $\lambda(r)$, а саме, $r^{\lambda(r)} \nearrow +\infty$, $r\left(r^{\lambda(r)}\right)'/r^{\lambda(r)} = \lambda(r) + r\lambda'(r) \ln r \to 0$ при $r \to +\infty$.

***Доведення теореми* 2.** Нехай $E \in C_0^{\alpha}$, $1 < \alpha \leq 2$, — множина, зовні якої виконується (1), $\theta_r = \{\varphi \in [0, 2\pi] \colon re^{i\varphi} \in E\}$, $\theta(r)$ — міра θ_r. Тоді $E \in C_0^2$ і $\displaystyle\int_{2^{n-1}}^{2^n} \theta(t) t\, dt = \eta_n^4 2^{2n}$, де $\eta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Нехай

$$M_n = \left\{t \colon 2^{n-1} \leq t \leq 2^n,\, \theta(t) > \eta_n^2\right\},$$

$$L_n = \left\{t \colon 2^{n-1} \leq t \leq 2^n,\, \int\limits_{\theta_t} |F(te^{i\varphi})| d\varphi \geq \eta_n^{-1} v(2^n) \left(\frac{\eta_n^2}{2} + \frac{\eta_n^2}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)\right\},$$

де $\eta_n \to 0$, $n \to +\infty$. Як і в [6], отримуємо $\eta_n^4 2^{2n} \geq \displaystyle\int_{M_n} \theta(t) t dt \geq \eta_n^2 2^{n-1} \mathrm{mes} M_n$, звідки $\mathrm{mes} M_n \leq 2^{n+1} \eta_n^2$. За лемою 2

$$Kv(2^{n+1}) \left(\frac{\eta_n^2}{2} + \frac{\eta_n^2}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{\eta_n^2}\right)\right) \geq \int\limits_{L_n \setminus M_n} \frac{dt}{t} \int\limits_{\theta_t} |F(te^{i\varphi})| d\varphi \geq$$

$$\geq \eta_n^{-1}\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)2^{-n}\mathrm{mes}(L_n\setminus M_n).$$

Звідси $\mathrm{mes}(L_n\setminus M_n)\leq K2^n\eta_n$. Отже, $\mathrm{mes}(L_n\cup M_n)=o(2^n)$, $n\to+\infty$. Покладемо

$$D=\{|a_n|\colon n\in\mathbb{N}\}\cup\left\{\bigcup_{n=1}^{+\infty}(L_n\cup M_n)\right\}.$$

Очевидно, що $D - E_0$-множина. При $r\notin D$ з (1) отримуємо

$$c_k(r,F)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{[0,2\pi]\setminus\theta_r}(\Delta\upsilon(r)+o(\upsilon(r)))e^{-ik\varphi}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi=$$

$$=\Delta\upsilon(r)s_k+o(\upsilon(r))+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}\left(F(re^{i\varphi})-\Delta\upsilon(r)\right)e^{-ik\varphi}d\varphi,\qquad r\to+\infty, \tag{9}$$

де $s_k=0$ для $k\neq 0$, $s_0=1$. Оскільки для $r\in[2^{n-1},2^n]\setminus D$ виконується $\theta(r)\leq\eta_n^2$, то $\theta(r)\to 0$ при $r\to+\infty$, $r\notin D$. Тому

$$\frac{\Delta}{2\pi}\upsilon(r)\left|\int\limits_{\theta_r}e^{-ik\varphi}d\varphi\right|\leq\frac{\Delta}{2\pi}\upsilon(r)\theta(r)=o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty,\qquad r\notin D. \tag{10}$$

При $r\in[2^{n-1},2^n]\setminus D$ маємо також

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}F(re^{i\varphi})e^{-ik\varphi}d\varphi\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_r}|F(re^{i\varphi})|d\varphi\leq\eta_n^{-1}\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n^2}{2}+\frac{\eta_n^2}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)=$$

$$=\upsilon(2^n)\left(\frac{\eta_n}{2}+\frac{\eta_n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{\eta_n^2}\right)\right)=o(\upsilon(r)),\qquad r\to+\infty. \tag{11}$$

З (9)–(11) отримуємо

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)}=\Delta,\qquad \lim_{r\to+\infty}{}^{*}\,\frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}=0,\qquad k\neq 0,$$

що доводить теорему 2.

***Доведення теореми* 3.** За лемою 4 для $\gamma=2$ маємо

$$|c_k(r,F)|\leq K\upsilon(r)\left(\frac{1}{2^{|k|}}+\frac{1}{|k|}\right),\qquad |k|\geq 2,\qquad r\notin G',\qquad G'\in\mathcal{E}_{\eta-1}.$$

Отже, послідовність $\left(\dfrac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)}\right)_{k=-\infty}^{k=+\infty}$ належить простору l_q при $q>1$, $r\notin G'$. Далі $c_k(r,F-n(r))=c_k(r,F)$ для $k\neq 0$, $c_0(r,F-n(r))=0$ і за теоремою Хаусдорфа–Юнга при $p\geq 2$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \leq \left\{ \sum_{k \neq 0} \left| \frac{c_k(r,F)}{\upsilon(r)} \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Оскільки ряд є рівномірно збіжним на $[0, +\infty) \setminus G'$ і існує E_0-множина D така, що для $k \neq 0$ виконується $c_k(r,F)/\upsilon(r) \to 0$, $r \to +\infty$, $r \notin D$, то

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p \to 0, \qquad r \to +\infty, \qquad r \notin G, \qquad G = (G' \cup D) \in \mathcal{E}_{\eta-1}.$$

За нерівністю Гельдера $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_2$ для $1 \leq p < 2$. Тому останнє співвідношення є правильним для $p \in [1, +\infty)$, що доводить теорему 3.

Завдяки нерівності трикутника для p-норм маємо

$$\left\| \frac{F(re^{i\varphi})}{\upsilon(r)} - \Delta \right\|_p \leq \left\| \frac{F(re^{i\varphi}) - n(r)}{\upsilon(r)} \right\|_p + \left\| \frac{n(r)}{\upsilon(r)} - \Delta \right\|_p,$$

звідки отримуємо твердження наслідку.

***Доведення теореми* 4.** З (8) і правила Лопіталя, оскільки $\upsilon(r) = o(\upsilon_1(r))$, $r \to +\infty$, зовні деякої E_0-множини D $(k \neq 0)$ маємо

$$\frac{N_k(r)}{\upsilon_1(r)} = \frac{1}{\upsilon_1(r)} \int_0^r \frac{c_k(t,F)}{t} dt - \frac{k}{\upsilon_1(r)} \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^t \frac{c_k(\tau,F)}{\tau} d\tau =$$

$$= o(1) - \frac{k}{\upsilon(r)} \int_0^r \frac{c_k(t,F)}{t} dt = -kl_k + o(1),$$

$$r \to +\infty, \qquad r \notin D, \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{N_0(r)}{\upsilon_1(r)} = \lim_{r \to +\infty} \frac{c_0(r,F)}{\upsilon(r)} = l_0.$$

Враховуючи, що для $0 < r' < r'' < 2r' < +\infty$ виконується

$$\left| N_k(r'') - N_k(r') \right| \leq \int_{r'}^{r''} \frac{n(t)}{t} dt \leq K(\upsilon_1(r'') - \upsilon_1(r')) = o(\upsilon_1(r')), \qquad r' \to +\infty,$$

отримуємо

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{N_k(r)}{\upsilon_1(r)} = -kl_k, \qquad k \neq 0.$$

За теоремою Каратеодорі – Леві (див., наприклад, [4, с. 98]) отримуємо, що нулі $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$ мають усереднену кутову υ_1-щільність.

***Доведення теореми* 5.** В [11] (лема 4) доведено, що з існування кутової υ-щільності нулів $f \in \mathcal{H}_0(\upsilon)$ випливає існування границь

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{c_k(r, \log f)}{\upsilon(r)} = l_k, \qquad k \neq 0.$$

Оскільки $c_k(r, \log f) = \int_0^r c_k(t, F)/t\ dt$, то за лемою 6 отримуємо існування границь (3) для $k \neq 0$.

Навпаки, оскільки за умов теореми 4 $rv'(r)/v(r) \searrow 0$ при $r \to +\infty$, то з існування границь (3) за цією теоремою і лемою 7 маємо існування кутової v-щільності нулів функції $f \in \mathcal{H}_0(v)$.

5. Приклад. Нехай

$$f(z) = (1 - z) \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_{k+1}} \right)^{2^k} \right),$$

де $r_k = \exp\{k(k-1)/2\}$. Легко переконатися, що $n(r) = 2^k$, $r_k \le r < r_{k+1}$,

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}}\, n(r)/2^{\sqrt{2 \ln r}} = \sqrt{2}, \qquad \underline{\lim_{r \to +\infty}}\, n(r)/2^{\sqrt{2 \ln r}} = 1/\sqrt{2}.$$

Тому $f \in \mathcal{H}_0(v)$, $v(r) = 2^{\sqrt{2 \ln r}} \in \mathcal{L}$ і нулі f не мають кутової v-щільності.

Міркуючи, як у [6] (приклад 2), отримуємо

$$F(z) = n(r) + o(1), \qquad z \to \infty, \qquad z \notin E,$$

де E — деяка C_0^2-множина.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
3. *Азарин В. С.* О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1977. – **27**. – С. 9 – 22.
4. *Кондратюк А. А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Вища шк., 1988. – 196 с.
5. *Гольдберг А. А., Коренков Н. Е.* Асимптотика логарифмической производной целой функции вполне регулярного роста // Сиб. мат. журн. – 1980. – **21**, № 3. – С. 63 – 79.
6. *Гольдберг А. А., Строчик Н. Н.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных // Сиб. мат. журн. – 1985. – **26**, № 6. – С. 29 – 38.
7. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. II // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 1. – С. 37 – 58.
8. *Гольдберг А. А. Заболоцкий Н. В.* Индекс концентраций субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки. – 1983. – **34**, № 2. – С. 227 – 236.
9. *Заболоцкий Н. В.* Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка // Мат. заметки. – 1998. – **63**, № 2. – С. 196 – 208.
10. *Заболоцький М. В., Боднар О. В.* Регулярне зростання коефіцієнтів Фур'є логарифму цілої функції нульового порядку // Мат. вісн. НТШ. – 2009. – **6**. – С. 100 – 109.
11. *Боднар О. В., Заболоцький М. В.* Критерії регулярності зростання логарифма модуля та аргументу цілої функції // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 7. – С. 885 – 893.
12. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 142 с.
13. *Заболоцький М. В.* Асимптотика логарифмічної похідної цілої функції нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 32 – 40.
14. *Васильків Я. В.* Асимптотична поведінка логарифмічної похідної та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. I // Мат. студ. – 1999. – **12**, № 1. – С. 37 – 58.
15. *Калинець Р. З., Кондратюк А. А.* Про регулярне зростання модуля і аргументу цілої функції $L^p[0, 2\pi]$-метриці // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 889 – 896.
16. *Братищев А. В.* Об обращении правила Лопиталя // Механика сплошной среды. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. гос. ун-та, 1985. – С. 28 – 42.

Одержано 21.05.13