

Ihor Zanevsky, Igor Ohirko, Olga Ogirko

## Metody modelowania w logistyce transportu

*Transport wiąże się z przemieszczaniem osób i ładunków w przestrzeni, przy wykorzystaniu odpowiednich środków transportu. Potrzeby te należą do grupy potrzeb wtórnych człowieka i są związane z faktem różnego rozmieszczenia przestrzennego zasobów, skupisk ludzkich i miejsc pracy. Transport towarzyszył ludzkości od samych początków rozwoju cywilizacji. Jest to, obok łączności, dział gospodarki, który zwiększa użyteczność dóbr poprzez ich przemieszczanie w przestrzeni. Transport jest ściśle powiązany z pozostałymi działami gospodarki. Jego rozwój warunkuje ich rozwój i odwrotnie – gorszy rozwój gospodarki lub transportu wiąże się z pogorszeniem sytuacji, odpowiednio w transporcie i gospodarce.*

W połączeniu z logistyką oraz spedycją, transport wchodzi w skład branży TSL (transport-spedycja-logistyka). Planowanie transportu wiąże się z wielowymiarową oceną warunków towarzyszących problemom transportowym. E-logistyka to dział logistyki polegający na wykorzystaniu Internetu oraz systemów informatycznych do koordynowania i integrowania działań prowadzących do dostarczenia produktów od wytwórców do detalistów lub konsumentów. Metoda wykorzystuje oferowaną przez sieć możliwość oddzielenia produktu od informacji. Pomiędzy uczestnikami łańcucha dostaw krążą jedynie informacje dotyczące produktu: gdzie, ile, na kiedy jest potrzebny. Natomiast sam produkt nie powtarza tej drogi np. omija magazyny i trafia od razu do klientów. Oddział staje się jedynie biurem handlowym, a nie miejscem magazynowania czy przeładunku. Od momentu opuszczenia miejsca produkcji aż do miejsca przeznaczenia, towar jest ciągle w ruchu: nie jest magazynowany, nie przechodzi przez ręce wielu hurtowników czy dystrybutorów. Informacje o tym, gdzie się aktualnie znajduje, są ciągle dostępne w Internecie.

Dostawcami usług e-logistycznych mogą być zarówno tradycyjne firmy logistyczne, jak i rynki elektroniczne. Firmy dostawcze przejmują cały fizyczny proces dostawy, zlecając część zadań podwykonawcom w swojej sieci, zaś e-rynki umożliwiają sprzedaż i zakup usług logistycznych, spedycyjnych i transportowych przez Internet.

Zagadnienia związane z logistyką nabierają systematycznie coraz większego znaczenia. Globalizacja i wzrost konkurencji w dziedzinie jakości zmuszają firmy do sięgania po nowe rozwiązania, wdrażania nowych koncepcji logistycznych i wykorzystywania dorobku intelektualnego w celu optymalizacji procesu zarządzania zintegrowanym łańcuchem dostaw. Na logistykę przedsiębiorstwa składa się wiele funkcji zarządzania operacyjnego, tym samym wiele obszarów planowania: obsługi klienta, dystrybucji, logistyki produkcji, zaopatrzenia i gospodarki materiałowej, magazynu i gospodarki magazynowej, transportu i spedycji, zapasów, skoordynowanego przepływu materiałów.

W artykule przedstawiono problem optymalizacji logistyki transportu. Z teoretycznego punktu widzenia jest to połączenie dwóch problemów. Z tego względu do rozwiązania sformułowanych problemów zaproponowano metodę programowania.

Artykuł poświęcono modelowaniu systemów transportowych, kładąc szczególny nacisk na problematykę formułowania zadań optymalizacyjnych rozłożenia potoku ruchu na sieć transportową. Przedstawiono w nim zarówno problematykę modelowania systemów transportowych, jak i metodę oceny wielokryterialnej funkcjonowania tych systemów.

Publikacja zawiera sformułowania zadań optymalizacyjnych rozłożenia potoku ruchu w aspekcie organizacji ruchu, rozumianej jako sposób wykorzystania wyposażenia systemu transportowego w realizacji zgłaszanego zapotrzebowania na przewóz. Celem pracy było określenie roli i miejsca modelowania i symulacji. Matematyczna gospodarka jest to zestaw metod matematycznych, pozwalających przedstawić teorie i przeanalizować problemy w gospodarce. Mowa matematyki pozwala ekonomistom konkretyzować pozytywne wymogi o spornych czy dokładnych tematach, które byłyby niemożliwe bez matematyki. Wiele teorii ekonomicznych jest obecnie wykorzystywanych w terminach matematycznych modeli ekonomicznych. Technologia informacyjna ma stać się podstawowym narzędziem, a jej poziom rozwoju w dużej mierze wpływa na poziom rozwoju kraju jako całości. Celem pracy było określenie roli i miejsca modelowania systemów transportowych.

### Typy modeli

Można wyróżnić m.in. następujące typy modeli [1–6]:

- ♦ o podobieństwie kinetycznym,
- ♦ o podobieństwie geometrycznym np. makiety, mapy,
- ♦ o podobieństwie dynamicznym – stosowane w tunelach aerodynamicznych,
- ♦ tworzone przez analogie – hydrauliczno-elektryczne,
- ♦ matematyczne.

Model matematyczny to zbiór symboli oraz relacji matematycznych wraz z bezwzględnie ścisłymi zasadami operowania nimi. Symbole i relacje odnoszą się do konkretnych elementów rzeczywistości, którą badamy.

### Etapy modelowania

Określiły 5 etapów modelowania: sformułowanie celu modelowania; wybranie kategorii modelu oraz określenie jego struktury; identyfikacja parametrów modelu; algorytmizacja modelu; zweryfikowanie wyników. Formułując cel modelowania należy pamiętać, że jest to proces ukierunkowany celowo. Znaczący to, że stworzony model ma mieć konkretne zastosowanie. W przypadku badań systemowych nadrzędnym celem jest stworzenie narzędzi, które pozwolą przewidzieć, jak zachowa się badany system w innych warunkach niż istniejące aktualnie. Gdyby nie modele, w celu sprawdzenia zachowania się obiektu w zmieniających się warunkach należałoby eksperymentować na rzeczywistym systemie, co jest bardzo kosztowne i czasochłonne, a często wręcz niemożliwe do przeprowadzenia. Z tego wynika, że największe znaczenie mają modele, przy pomocy których można zbadać zachowanie się systemów, które jeszcze nie istnieją i systemów, mających działać w różnorodnych warunkach, w których do tej pory nie występowały.

## Modelowanie matematyczne

Potocznie pod pojęciem model rozumiemy przedstawienie danego obiektu, czy też zjawiska w uproszczonej postaci w stosunku do rzeczywistości. W nauce jest to celowe uproszczenie rzeczywistości, polegające na pominięciu cech i szczegółów nieistotnych z punktu widzenia celu modelowania. Przyczyną tworzenia modeli jest nie tylko chęć poznania rzeczywistości i praw nią rządzących, ale także zbadanie możliwości wpływu na otaczające nas zjawiska, badanie zjawisk w innych warunkach i w przyszłości [7–13].

Model matematyczny to zbiór symboli oraz relacji matematycznych wraz z bezwzględnie ścisłymi zasadami operowania nimi. Symbole i relacje odnoszą się do konkretnych elementów rzeczywistości, którą badamy. Model opisuje dane zjawisko za pomocą zmiennych, których wartości mogą należeć do różnorodnych wartości np. liczb całkowitych, rzeczywistych, wartości logicznych itp. Modelowanie matematyczne to dziedzina, której zadaniem jest opisanie zjawisk w języku matematyki oraz logiki formalnej [3–11].

Modelowanie matematyczne polega na użyciu języka matematyki w celu opisanego jakiegoś układu np. biologicznego, elektrycznego, termodynamicznego, ekonomicznego, wykorzystywane jest przy optymalizacji warunków pracy, prognozowaniu pogody. Modelowanie matematyczne ma zastosowanie w wielu dziedzinach życia, głównie w tych, w których zachodzi powtarzalność lub podobieństwo zdarzeń, czyli w naukach ekonomicznych, przyrodniczych, społecznych, medycznych. Przy użyciu modelowania matematycznego wnioski będą zgodne z rzeczywistością pod warunkiem, że sformułowanie wejściowe oraz założenia były poprawne oraz dokładne z punktu widzenia celu, jaki badacz zakłada. Jeśli początkowe hipotezy będą fałszywe, nie osiągniemy poprawnych wyników [10–13].

Modele matematyczne są klasyfikowane według różnych kryteriów.

### A. Ze względu na czas:

- 1) statyczne – nie uwzględnia się zmian wartości w czasie, z zasady wykorzystywane są równania algebraiczne,
- 2) dynamiczne – czas jest wartością wejściową, często wykorzystujemy równania różniczkowe.

Z zasady wszystkie modele rzeczywiste mają charakter dynamiczny. Modelem statycznym można się zadowolić, gdy stosujemy uproszczenie w sytuacji, gdy badamy stany równowagi.

### B. Ze względu na związek przyczynowo-skutkowy:

- 1) deterministyczne – odpowiedź jest jednoznacznie określona dla każdego zbioru wartości wejściowych, obowiązuje związek przyczynowo-skutkowy, czyli dane zjawisko w sposób jednoznaczny wywołuje i wpływa na inne,
- 2) stochastyczne – odpowiedź ma charakter losowy, podają wyniki z określeniem prawdopodobieństwa, najczęściej stosowane są w ekonometrii, czyli w dziedzinach, w których trudno określić jednoznacznie związek przyczynowo-skutkowy [11–12].

### C. Ze względu na etap tworzenia modelu:

- 1) wstępny – tworzony, gdy nie znamy jeszcze wszystkich podstawowych mechanizmów procesu, jego istota polega na wskazaniu jakie dane musimy jeszcze uzyskać,
- 2) ogólny – zawiera już wszystkie znane badaczowi zależności i procesy, ale techniczne postępowanie się nim jest skomplikowane,
- 3) sumaryczny – ostateczna forma symulacji komputerowej, jest wykorzystywana praktycznie.

Można wyróżnić następujące etapy modelowania:

- a) sformułowanie celu modelowania,
- b) wybranie kategorii modelu oraz określenie jego struktury,
- c) identyfikacja parametrów modelu,
- d) algorytmizacja modelu,
- e) zweryfikowanie wyników.

Należy pamiętać, że modele matematyczne muszą spełniać dwa podstawowe wymagania: łatwości użytkownika zgodnie z jego przeznaczeniem oraz zgodności z modelowanym systemem odnośnie zależności, które interesują badacza. Często wymagania te mogą być sprzeczne. Należy na tym etapie poszukać kompromisu między nadmiernym uproszczeniem modelu, co może prowadzić do błędnych wniosków a modelem zbyt skomplikowanym, co utrudnia jego stworzenie. W tym etapie należy też rozwiązać problem istotności, czyli wyboru hipotez istotnych i tych, które należy odrzucić.

Rozróżniamy 2 podstawowe typy wartości liczbowych:

- 1) parametry – współczynniki na stałe ujęte w algorytmie i programie komputerowym, może ich być od kilku do kilkudziesięciu w zależności od stopnia skomplikowania modelu; określa ją np. dynamikę przemian,
- 2) dane – określają warunki zewnętrzne modelowanego obiektu.

Z zasady teoretyczna wiedza nie jest wystarczająca, by nadać modelowi postać, która umożliwi wykonanie obliczeń. Często nie są znane wszystkie wartości liczbowe niektórych parametrów modelu. W takich sytuacjach dokonuje się ich szacunku na podstawie innych ustalonych parametrów. Proces ten nazywany jest estymacją, a oszacowane statystycznie wartości nazywamy estymatorami. Proces identyfikacji parametrów połączony z ich estymacją to tzw. kalibracja modelu. Ma ona zapewnić zgodność predykcyjną modelu w warunkach odmiennych od tych, w których został opracowany [4–6].

Identyfikacja może być bierna lub czynna. Identyfikacja bierna ma na celu wyznaczenie postaci i parametrów modelu poprzez zgromadzenie danych podczas standardowego działania systemu, które poddawane jest opracowaniu statystycznemu.

Pod pojęciem algorytmu rozumiemy uporządkowany i skończony ciąg jasno sprecyzowanych czynności, które są niezbędne do wykonania zadania. Poprawnie zbudowany algorytm można wykorzystać do rozwiązywania podobnych zadań.

Algorytm musi spełniać trzy podstawowe zasady:

1. Liczba operacji jest wielkością skończoną – policzalna liczba operacji wynika z faktu, że przy użyciu algorytmu podczas realizacji zadania, po wykonaniu odpowiedniej ilości czynności musi nastąpić jego pomyślne zakończenie. Liczba operacji jest różna w zależności od złożoności modelu.
2. Operacje muszą być zrozumiałe i wykonalne dla realizatora – istotne jest poznanie potencjalnych użytkowników, gdyż każdy posiada inny zasób wiedzy.
3. Poprawna kolejność wykonywania poszczególnych operacji – wynika z logiki odwzorowywanego procesu.

Weryfikacja jest to porównanie wyników modelowania ze stanem rzeczywistym pod kątem zgodności z badaniami doświadczalnymi i wiedzą teoretyczną. Faza ta jest ściśle powiązana z każdym z poprzednich etapów budowy modelu, a zatem powinna odbywać się we wszystkich etapach, nie tylko po ukończeniu całego procesu. Struktura modelu są to wewnętrzne powiązania między elementami modelu i modelem a rzeczywistością. Ma ona zapewnić zgodność modelowanych powiązań z istniejącymi w rzeczywistości i jednocześnie być przyjazna (łatwa w obsłudze) dla użytkownika [3–7].

Dzięki matematyce uczymy się logicznego myślenia co pomaga nam w podejmowaniu przyszłych decyzji. Ważną część wiedzy ekonomicznej stanowią również kwestie związane z finansami. Powinniśmy tym samym wiedzieć, czym jest procent składany, jak naliczane są odsetki od kredytów, jaki produkt bankowy można uznać za najbardziej korzystny [2–5].

Formułowanie modeli może mieć zastosowanie do wielu zagadnień w życiu codziennym: ekonomii gospodarstwa, obliczania podatków dochodowych, inwestycji, planowania remontów, różnych operacji bankowych, do dokonywania różnego rodzaju obliczeń, porównań, zestawień czy obliczeń statystycznych zestawionych w formie tabelarycznej lub słupkowej przy pomocy programu Excel, ustalania wyniku finansowego metodą statyczną, wyceny aktywów i kapitałów z uwzględnieniem amortyzacji danego środka, prowadzenia różnych statystyk.

Model jest pojęciem bardzo ogólnym, używanym w różnych dziedzinach. Celem tworzenia wszelkich modeli jest dążenie do zrozumienia otaczającej nas rzeczywistości, a także uzyskanie pomocy w uporaniu się z jej niezwykle złożonością. Modelem matematycznym nazwiemy zbiór symboli i relacji matematycznych oraz ścisłych zasad operowania nimi, przy czym zawarte w modelu symbole i relacje mają interpretację odnoszącą się do konkretnych elementów modelowanego wycinka rzeczywistości.

W procesie rozwiązywania zadań za pomocą modelowania matematycznego można rozróżnić kilka podstawowych etapów, a mianowicie: sformułowanie celów modelowania, wybór kategorii modelu i określenie jego struktury, algorytmizacja obliczeń, weryfikacja obliczeń. Decyzje gospodarcze należą do tych, których konsekwencje rozpatrujemy w kategoriach zysków i strat, dlatego zanim je podejmiemy dokonujemy analizy sytuacji, ustalamy kryteria wyboru decyzji i poszukujemy rozwiązań optymalnych. Pomocne wówczas okazują się metody badań ilościowych prawidłowości występujących w zjawiskach ekonomicznych, które można byłoby najogólniej nazwać ekonometrią.

W badaniach ekonomicznych wykorzystywane są różnorodne metody, wypracowane przez wiele dyscyplin matematyki, przede wszystkim analizę matematyczną, algebrę liniową, rachunek prawdopodobieństwa, statystykę matematyczną, programowanie matematyczne, badania operacyjne, teorię procesów stochastycznych, równania różniczkowe i różnicowe, stochastyczne równania różniczkowe, analizę funkcjonalną, teorię grafów [3–7]. Modelowanie matematyczne obecne jest w makro i mikroekonomii, zarządzaniu przedsiębiorstwem, marketingu, logistyce ekonomicznej, ekonomice transportu, zarządzaniu regionalnym, finansach, bankowości i ubezpieczeniach.

Ryzyko ma charakter losowy. Zmienna losowa  $X$  (ryzyko), opisuje ryzyko ubezpieczeniowe. Wartości szkód są zwykle opisywane za pomocą ciągłych zmiennych losowych, liczby szkód przez zmienne losowe dyskretne, a momenty występowania szkód przez zmienne losowe ciągłe lub dyskretne.

Charakterystyki ryzyka ubezpieczeniowego:

- ♦ wartość oczekiwana  $E(X) < \infty$ ,
- ♦ wariancja, odchylenie standardowe  $V(X)$ ,
- ♦ mediana  $Me$ , kwantyle  $Q_1, Q_3$ ,
- ♦ współczynnik skośności.

Procesy stochastyczne opisują zmianę ryzyka w czasie. Oznaczenie:  $X_t$  dla czasu ciągłego,  $X_n$  dla dyskretnego. Indywidualny model ryzyka polega po prostu na tym, że szkody związane z poszczególnymi polisami opisuje się jako niezależne, nieujemne zmienne losowe. Oczywiście, założenie o niezależności jest

pewnym uproszczeniem, ale w modelowaniu matematycznym tego rodzaju idealizacje są nieuniknione. Głównym obiektem zainteresowania jest suma szkód w portfelu polis i jej rozkład prawdopodobieństwa. W rozważanym modelu ten rozkład jest splotem rozkładów pojedynczych składników. Indywidualny model ryzyka  $S = S_n = X_n$   $i = 1, \dots, n$ , gdzie  $X_1, \dots, X_n$  są niezależnymi zmiennymi losowymi i  $X_i > 0$ .  $X_i$  oznacza szkody związane z  $i$ -tą polisą,  $S$  oznacza sumę szkód w rozważanym portfelu.

Podkreślmy jeszcze, że omawiany model opisuje straty w ustalonym okresie (powiedzmy w ciągu roku) i wobec tego nie ma tu potrzeby jawnego uwzględniania czasu pojawiania się poszczególnych szkód [1–6]. Nieodłącznym elementem gospodarki rynkowej jest ryzyko. Towarzyszy ono każdej działalności człowieka. Wobec tego konieczna staje się umiejętność identyfikacji, pomiaru, a następnie kontroli i zabezpieczania się przed występującym zagrożeniem. Szczególnie ważna dla managerów przedsiębiorstw, ponieważ nieodpowiednio podjęta decyzja może skutkować pojawieniem się niepożądanych skutków, tj. poniesieniem bardzo wysokich strat [1–7]. Przyjmijmy, że mamy portfel składający się z  $n$  polis. Interesuje nas suma odszkodowań pochodzących z tych polis. Zakładamy przy tym, że ryzyka  $X_i$  są niezależne, a z każdej polisy odszkodowanie może wystąpić co najwyżej raz. Model ten stosowany jest zwykle w ubezpieczeniach osobowych. Wtedy suma odszkodowań  $S$  przyjmuje postać:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (1)$$

Wartość oczekiwana sumy odszkodowań i jej wariancja jest równa:

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n) \\ V(S) &= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n) \end{aligned} \quad (2)$$

Często przyjmujemy, że  $X_i = I_i B_i$ ,  
gdzie:  $B_i > 0$

oraz  $I_i = \begin{cases} 1 & \text{nastąpiła wypłata z } i\text{-tej polisy} \\ 0 & \text{nie nastąpiła wypłata z } i\text{-tej polisy} \end{cases}$

Oznaczmy symbolem  $q_i$  prawdopodobieństwo wystąpienia szkody w polisie  $i$ , wtedy:

$$q_i = P(I_i = 1) = 1 - p_i \quad (3)$$

Dystrybucja zmiennej losowej  $X_i$  opisana jest wzorem:

$$F_i(x) = p_i \delta_0(x) + q_i F_{B_i}(x) \quad (4)$$

gdzie:  $\delta_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{gd } x < 0 \\ 0 & \text{gd } x \geq 0 \end{cases}$

Podstawowe parametry sumy  $S$  wynoszą:

$$E(S) = \sum_{i=1}^n \mu_i q_i, \quad V(S) = \sum_{i=1}^n (\mu_i^2 q_i p_i - \sigma_i^2 q_i) \quad (5)$$

Trudno znaleźć analityczną, dokładną postać rozkładu sumy  $S$ , nawet gdy znamy rozkłady składowych  $X_i$ , o dystrybucje  $F_i$  i gęstości  $f_i$ . Można natomiast skorzystać z pojęcia splotu\*. Gęstość  $S$  dla dwóch składników jest równa:

$$f_s(s) = (f_1 \cdot f_2)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s-x) f_2(x) dx \quad (6)$$

a w przypadku dyskretnym:

$$p_s(s) = (p_1 \cdot p_2)(s) = \sum_{i=1}^m p_1(s-x_i) p_2(x_i) \quad (7)$$

Dla sumy  $n$  składowych o tym samym rozkładzie korzystamy ze wzoru rekurencyjnego  $f * n = (...(f * f) * ...) * f$ .

Można też skorzystać z funkcji tworzącej momenty:

$$M_S(z) = Ee^{zS} = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(z) = \prod_{i=1}^n [p_i + q_i M_{B_i}(z)] \quad (8)$$

oraz ze wzorów rekurencyjnych.

Dla dużej liczby składowych  $n$  sumę  $S$  można, korzystając z centralnego twierdzenia granicznego, przybliżyć rozkładem normalnym o wartości oczekiwanej  $\mu = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  i wariancji  $\sigma_2 = s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2$ , gdzie  $m_i = E(X_i)$ ,  $s_i^2 = V(X_i)$ .

## Model ryzyka

Portfel składa się z polis i jest rozpatrywany w całości, czyli nie identyfikuje się polis, z których pochodzi roszczenie. Model ten jest stosowany zwykle w ubezpieczeniach majątkowych [13–17]. Całkowita suma roszczeń w danym okresie  $(0, t)$  jest określona wzorem:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)} \quad (9)$$

gdzie: zmienna losowa  $N(t)$  jest liczbą roszczeń  $X_i$  w okresie  $(0, t)$ . W modelu tym przyjmujemy, że zmienne losowe  $X_1, X_2, \dots$  są niezależne o tym samym rozkładzie z dystrybuantą  $F_X$ , wartością oczekiwaną  $m$  i wariancją  $\sigma_2$  oraz są niezależne od  $N(t)$ .

Suma  $S(t)$  jest zmienną losową złożoną. Jej dystrybuanta opisana jest wzorem:

$$F_{S(t)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_{S_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k F_X^{*k}(x) \quad (10)$$

gdzie:  $p_k = P(N(t) = k)$

oraz  $S_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$ , a wartość oczekiwana i wariancja przyjmują prostą postać:

$$E(S(t)) = mE(N(t)), \quad V(S(t)) = \sigma^2 E(N(t)) + m^2 V(N(t)) \quad (11)$$

Przyjmijmy założenie, że liczba szkód  $N(t)$  ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda t$ , czyli:

$$p_k = P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (12)$$

Parametr  $\lambda$  nazywamy intensywnością. Wtedy:

$$E(N(t)) = V(N(t)) = \lambda t \quad (13)$$

Oznaczmy kolejne momenty roszczeń jako ciąg zmiennych losowych  $0 < T_1 < T_2 < \dots$ . Wtedy okresy między roszczeniami  $W_i$  spełniają zależności:

$$W_1 = T_1, \quad W_2 = T_2 - T_1, \quad \dots, \quad W_n = T_n - T_{n-1} \quad (14)$$

Dla procesu Poisson'a okresy  $W_n$  są niezależne i mają rozkład wykładniczy ze średnią  $1/\lambda$ , tzn. dystrybuanta  $W_n$  wynosi:

$$F_W(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (15)$$

Ponadto zachodzi zależność:

$$E(W) = \frac{1}{E(N(1))} \quad (16)$$

Gdy proces liczący szkody  $N(t)$  jest procesem Poisson'a, to możemy, że suma odszkodowań  $S(t)$  ma złożony rozkład Poisson'a z parametrami:

$$E(S(t)) = m\lambda t, \quad V(S(t)) = (\sigma^2 + m^2)\lambda t \quad (17)$$

Podobnie jak dla modelu indywidualnego ryzyka, w przypadku modelu kolektywnego, na ogół nie można znaleźć dokładnego rozkładu sumy odszkodowań  $S(t)$ . Korzysta się wtedy z przybliżeń. Na początku omówimy pojęcia momentów zwykłych i cen-

tralnych.  $K$ -ty moment zwykły  $m_k$  określamy wzorem:  $m_k = E(X^k)$ . Najczęściej wykorzystuje się 3 pierwsze momenty:  $m_1 = E(X)$ ,  $m_2 = E(X^2)$  oraz  $m^3 = E(X^3)$ .

Natomiast  $k$ -ty moment centralny jest równy:

$$\mu_k = E(X - m_1)^k \quad (18)$$

Drugi moment centralny:

$$\mu_2 = E(X - E(X))^2 = V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (19)$$

jest wariancją zmiennej losowej  $X$ . Ponadto zachodzą następujące zależności wiążące pierwsze momenty zwykłe i centralne:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2, \quad \mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 \quad (20)$$

Symbole  $m_{k,X}$  oraz  $m_{\mu,X}$  oznaczać będą odpowiednie momenty dla zmiennej losowej  $X$ .

W przypadku, gdy suma odszkodowań  $S(t)$  ma złożony rozkład Poisson'a to pierwsze jej momenty centralne wynoszą:

$$\mu_{2,S(t)} = \lambda t m_{2,X}, \quad \mu_{3,S(t)} = \lambda t m_{3,X} \quad (21)$$

Przybliżamy sumę odszkodowań  $S(t)$  dla ustalonego  $t$  zmienną losową  $Z$  o rozkładzie normalnym [1–6]. Przyjmujemy, że zachodzi równość dwóch momentów, czyli  $m_{1,S(t)} = m_{1,Z}$  oraz  $\mu_{2,S(t)} = \mu_{2,Z}$ .

Przybliżamy sumę  $S(t)$  zmienną losową  $Z$  o dystrybuancie  $G(x - x_0; \alpha, \beta)$ , zachodzi wtedy zgodność trzech momentów:

$$m_{1,S(t)} = m_{1,Z}, \quad \mu_{2,S(t)} = \mu_{2,Z}, \quad \mu_{3,S(t)} = \mu_{3,Z} \quad (22)$$

Znając wartości momentów szkód  $X_i$  oraz korzystając z własności momentów i złożonego rozkładu Poisson'a możemy wyznaczyć wartości parametrów przesuniętego rozkładu gamma. Są one odpowiednio równe:

$$x_0 = \lambda t \left( m_{1,X} - 2 \frac{m_{2,X}^2}{m_{3,X}} \right) \quad (23)$$

$$\alpha = 4\lambda t \frac{m_{2,X}^2}{m_{3,X}^2}, \quad \beta = \frac{m_{3,X}}{2tm_{2,X}}$$

Wartości zmiennej losowej  $S(t)$  możemy wygenerować stosując następującą procedurę [5]:

- 1) wygenerować liczbę szkód  $k$  na odcinku  $[0; t]$ .
- 2) wygenerować wartości  $x_1, x_2, \dots, x_k$  z rozkładu  $X$ .
- 3) obliczyć  $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_k$ .

Wartości  $s_1, s_2, \dots, s_n$  są wtedy wygenerowane z rozkładu  $S(t)$ . Na ich podstawie otrzymujemy rozkład empiryczny, histogram oraz obliczamy  $E(S(t))$ ,  $V(S(t))$ .

Podczas generowania wartości zmiennych losowych, np.  $X$ , wykorzystujemy własność, że  $F_X(X) = U$ , gdzie zmienna losowa  $U$  ma rozkład jednostajny na  $[0; 1]$ , czyli  $X = F_X^{-1}(U)$ . Gdy  $X$  ma rozkład wykładniczy, czyli  $F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}$ , to  $\alpha = -\frac{1}{\beta} \ln(1 - u)$ .

Ekonomia matematyczna stanowi również uzupełnienie innych obszarów nauki, m.in.: statystyki, ekonometrii, prognozowania, badań operacyjnych. Załóżmy, że zmienia się cena dobra  $X$ . Algebraicznie dochód konsumenta przed zmianą ceny zapisujemy jako:

$$m = p_x \times x + p_y \times y \quad (24)$$

Dochód, jaki konsument musiałby osiągać, aby po zmianie ceny mógł nabyć początkowy koszyk dóbr to:

$$m' = p'_x \times x + p_y \times y \quad (25)$$



Zmianę dochodu kompensującą konsumentowi zmianę ceny zapisujemy jako:

$$m' - m = x(p'_x - p_x), \Delta m = x \times \Delta p_x \quad (26)$$

gdzie  $m$  – dochód,  
 $m'$  – dochód zmieniony,  
 $p_x$  – pierwotna cena dobra  $x$ ,  
 $p'_x$  – nowa cena dobra  $x$ ,  
 $p_y$  – cena dobra  $y$ ,  
 $X$  – ilość dobra  $x$ ,  
 $Y$  – ilość dobra  $y$ .

Efekt substytucyjny obliczamy ze wzoru:

$$\Delta x_S = x(m', p'_x) - x(m, p_x) \quad (27)$$

gdzie  $x(m, p_x)$  jest funkcją wielkości popytu na dobro  $x$  od dochodu konsumenta i ceny produktu.

Efekt dochodowy obrazuje wpływ zmiany ceny produktu na zmianę zgłaszanego zapotrzebowania na ten produkt, a spowodowanej zmianą siły nabywczej dochodu konsumenta. Obniżenie ceny zwiększa dochód konsumenta, a tym samym umożliwia mu zakup większej ilości każdego produktu. Podwyższenie ceny powoduje natomiast spadek możliwej do zakupu ilości produktów, spowodowany zmniejszeniem siły nabywczej dochodu.

W ujęciu potocznym prognozowanie to przewidywanie przyszłości oparte na naukowych podstawach. Przedmiotem prognozy mogą być zjawiska społeczne, gospodarcze, procesy demograficzne itp. Nie ma jednoznacznej definicji prognozowania. Według A. Filasiewicza prognozowanie to oparte na naukowych podstawach przewidywanie przebiegu i stanu przyszłych zdarzeń. Na kształtowanie się procesów wywierają wpływ czynniki zewnętrzne i wewnętrzne. Czynniki egzogeniczne, to te na które nie ma się wpływu i podczas prognozowania należy traktować je jako zewnętrzne ograniczenia, natomiast czynniki endogeniczne mogą być kształtowane przez zainteresowane osoby. Prognozowanie jest szczególnie przydatne w procesach decyzyjnych. Ma za zadanie zmniejszyć lukę informacyjną, by zmniejszyć ryzyko [6]. W prognozowaniu stosuje się różne metody. Metoda to sposób przetwarzania danych w prognozę.

Szeregiem czasowym nazywamy ciąg następujących po sobie obserwacji pokazujący kształtowanie się danego zjawiska w ustalonym przedziale czasu. Z zasady szeregi czasowe to rezultat złożenia się kilku różnych składników. Złożona struktura szeregu często utrudnia poprawne modelowanie oraz prognozowanie przyszłych wartości. Nie zawsze pojedynczy model prawidłowo odzwierciedla zmiany w kształtowaniu się składowych systemu [1–3]. Należy pamiętać, że prognozowanie na podstawie szeregów czasowych jest podejściem niestrukturalnym – to znaczy, że zakłada, iż przeszłość prognozowanej zmiennej zawiera pełną informację o mechanizmie wpływającym na jej przyszłe wartości. Modele niestrukturalne to modele tworzone bez zaplecza wiedzy ekonomicznej. Zanim rozpocznie się proces konstrukcji modelu prognostycznego należy sprawdzić, czy szereg czasowy może służyć jako podstawa do prognozowania. Może zdarzyć się, że udział przypadkowej składowej jest tak istotny, że żadna metoda statystyczna nie da poprawnych rezultatów badań. W związku z tym należy sprawdzić, czy rozkład danej cechy nie charakteryzuje się za dużym zróżnicowaniem zmienności  $S_y: V_y = S_y/y'' * 100\%$  ( $< y''$  – średnia).

O nadmiernym zróżnicowaniu badanej zbiorowości świadczy wartość tego współczynnika większa od 50%.

Budowa modelu jest wynikiem kompromisu między zbyt dużym uproszczeniem rzeczywistości a jej uszczegółowieniem. Należy pamiętać, że proste modele są bardziej zrozumiałe, tańsze i łatwiejsze do testowania.

Główne cele analizy szeregów czasowych to:

- ♦ wykrycie natury badanego zjawiska reprezentowanego przez ciąg obserwacji,
  - ♦ prognozowanie, czyli przewidywanie przyszłych wartości.
- W każdym szeregu można wyodrębnić kilka podstawowych składowych, które są wynikiem wpływu różnych czynników na badane zjawisko. Są to składowe systematyczne, czyli:
- ♦ tendencja rozwojowa (trend) – jest to długookresowa tendencja rozwojowa, skłonność do jednokierunkowych zmian, jest konsekwencją działania stałego zestawu czynników,
  - ♦ wahania cykliczne – związane są zazwyczaj z cyklem koniunkturalnym gospodarki, są to rytmiczne, długofalowe wahania wokół tendencji rozwojowej,
  - ♦ wahania sezonowe – to wahania wokół trendu w okresie do jednego roku, zazwyczaj powtarzają się w ciągu roku w tym samym czasie,
  - ♦ składowa przypadkowa część resztkowa – tzw. biały szum, przypadkowe wahania nie dające się wyjaśnić i nie podlegające kontroli.

Szeregi czasowe ulegają zmianom regularnym będącym efektem działania trendu i zmienności nieregularnej wywołanej działaniem reszt. W związku z tym składowe szeregu powiązane są z następującymi:

1. Addytywnym – efekty sezonowe polegające za zmianie wartości obserwowanego zjawiska w okresach tego samego typu np. wiosną w przybliżeniu o jednakową wartość przez cały obserwowany okres. Przyjmuje się założenie, że w tym przypadku wskaźnik addytywny dodaje się do wartości trendu.
2. Multiplikatywnym – efekty sezonowe są w przybliżeniu stałe w procentowym ujęciu w stosunku do wartości zjawiska [1–6]. Model klasyczny zakłada tendencję rozwojową badanego zjawiska. Klasyczny szereg czasowy można przedstawić w postaci formalnego modelu:

Model addytywny:

$$y_t := F(t) + S(t) + C(t) + \epsilon(t) \quad (28)$$

Model multiplikatywny:

$$y_t := F(t) S(t) C(t) \epsilon(t) \quad (29)$$

gdzie  $t$  – czas,

$y_t$  – wartość zmiennej objaśnianej opisującej określone zjawisko w chwili  $t$ ,

$F(t)$  – funkcja czasu opisująca tendencję rozwojową lub funkcja stała opisująca stałą poziom zmiennej prognozowanej,

$S(t)$  – funkcja czasu opisująca wahania sezonowe,

$C(t)$  – funkcja czasu opisująca wahania cykliczne,

$\epsilon(t)$  – funkcja czasu opisująca składową przypadkową – zmienność losową.

W klasycznych modelach zakłada się, że postać analitycznej funkcji trendu jest stała.

Doboru odpowiedniej funkcji dokonuje się na podstawie tzw. identyfikacji trendu [3–6]. Pomocna jest graficzna prezentacja wartości analizowanych wielkości. Następnie należy przeprowadzić estymację parametrów modelu prognostycznego. Proces ten polega na oszacowaniu wartości parametrów, przy których model jest najlepiej dopasowany do danych empirycznych.

Najczęściej stosowana jest klasyczna metoda najmniejszych kwadratów.

Klasyfikacja XYZ – jedna z metod klasyfikacji zasobów według regularności zapotrzebowania na nie i dokładności prognozowania:

X – regularne zapotrzebowanie, niewielkie wahania, wysoka dokładność prognozowania,

Y – zapotrzebowanie o charakterze sezonowym lub z wyraźnym trendem, średnia dokładność prognozowania,

Z – bardzo nieregularne zapotrzebowanie, niska dokładność prognozowania.

Inna wersja tej klasyfikacji zakłada podział według tempa zużycia lub sprzedaży:

X – duże tempo zużycia,

Y – średnie tempo zużycia,

Z – małe tempo zużycia.

Klasyfikacja ta bywa łączona z klasyfikacją ABC. W wyniku połączenia klasyfikacji ABC z XYZ powstaje 9 grup.

## Podsumowanie

Transportowanie jest zajęciem trwale związanym ze sposobem bytowania człowieka. Odnosi się ono zarówno do przemieszczania się samych ludzi, jak i przenoszenia – transportowania przez nich rzeczy. Najważniejsze potrzeby natury obiektywnej w zakresie przewozów ładunków obejmują:

1. Konieczność realizacji procesu produkcji.
2. Zróżnicowanie struktury przestrzennej i asortymentowej produkcji oraz wzrastający udział produktów o znacznej wielokrotności przewozów.
3. Zróżnicowanie struktury kierunkowej przewozów związanych z pogłębiającą się specjalizacją i kooperacją produkcji.
4. Zmiany w zaopatrzeniu rynków i dystrybucji produktów.
5. Zróżnicowanie rozmiarów obrotów, struktury przestrzennej i asortymentowej handlu wewnętrznego i zagranicznego.

Pasażerskie, obiektywne potrzeby przewozowe związane są z:

- a) przejazdami pracowniczymi,
- b) przejazdami młodzieży w celach edukacyjnych,
- c) przejazdami służbowymi.

## Bibliografia:

1. Tokarski T., *Ekonomia matematyczna. Modele mikroekonomiczne*, WNT, Warszawa 2011.
2. Kulapa W., *Matematyczne aspekty ekonomii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa 2008.

3. Kordzikowski H., *Umowa ubezpieczenia życiowego*, Faktor, Wrocław 1999.
4. Sangowski T., *Ubezpieczenia gospodarcze*, Poltext, Warszawa 1998.
5. Bednarski T., *Elementy matematyki w naukach ekonomicznych*, Oficyna Ekonomiczna, Warszawa 2004.
6. Kanas S., *Podstawy ekonomii matematycznej*, PWN, Warszawa 2011.
7. Coyle J. J., Bardi E. J., Langrey Jr. J. C., *Zarządzanie Logistyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2002, s. 231–235.
8. Krzyżaniak S., *Podstawy zarządzania zapasami w przykładach*, wyd. III, seria: Biblioteka Logistyka, ILiM, Poznań 2005, s. 20–25.
9. Abt S., Woźniak H., *Podstawy logistyki*, Gdańsk 1993.
10. Beier F., Rutkowski K., *Logistyka*, Warszawa 1997.
11. Dworecki S. E., *Logistyka w wojsku*, Warszawa 1996.
12. Dworecki S. E., *Wybrane problemy logistyki*, Warszawa 1994.
13. Ohirko I., Zaniewski I., Ogirko O., *Modelowanie i symulacja w naukach ekonomicznych*, „Autobusy – Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe” 2016, nr 6.

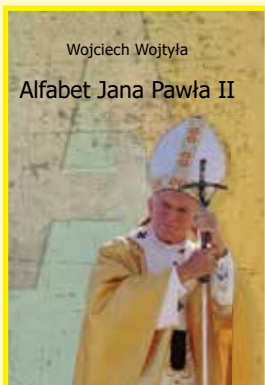
## Autorzy:

prof. dr hab. **Ihor Zanevsky** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, dr **Olga Ogirko** – Państwowy Uniwersytet Spraw Wewnętrznych we Lwowie,

prof. dr hab. **Igor Ohirko** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu.

### Methods of modeling in the transport logistics

*Transport involves the movement of people, cargo in space using appropriate means of transport. Transport has accompanied humanity since the very beginning of civilization. Transport is closely linked to the rest of the economy. Its development conditions their development and vice versa – the worse development of economy or transport is connected with deterioration of situation respectively in transport and economy. In combination with logistics and forwarding, transport is part of the TSL (transport-forwarding-logistics) industry. Transportation planning involves a multimodal assessment of the conditions accompanying transport problems. E-logistics – a division of logistics using the Internet and information systems to coordinate and integrate activities leading to the delivery of products from manufacturers to retailers or consumers. The method utilizes the network offered by the ability to separate the product from the information.*



## Wojciech Wojtyła: Alfabet Jana Pawła II

ISBN 978-83-66017-05-4

Liczba stron: 238

Format: A5

Oprawa: miękka

Rok wydania: 2018

Cena 35,00 zł (w tym 5% VAT)

*Książka jest kolejnym zaproszeniem do spotkania z myślą Jana Pawła II. Złożył się na nią zestaw 39 pojęć, wokół których na przestrzeni kilkudziesięciu lat konsekwentnie była budowana myśl autora „Osoby i czynu” oraz „Redemptor hominis” – filozofa, teologa, poety, duszpasterza, namiestnika Chrystusa na ziemi, w końcu świętego, który przez okres ponad 27 lat przewodził Kościołowi katolickiemu. Przybierająca formę alfabetu publikacja odbiega nieco od większości prac poświęconych myśli polskiego papieża, których autorzy wybierają jedno, może dwa, pojęcia, które – czyniąc pilotującymi poprzez bogactwo pozostawionych przez niego tekstów – traktują jako klucz do ich poznawania i systematyzowania.*



# TRANSEXPO

XIV Międzynarodowe Targi  
Transportu Zbiorowego

## 23-25.10.2018



Najważniejsze wydarzenie dla transportu zbiorowego



Powierzchnia wystawowa



Profesjonalnych  
zwiedzających



Wystawców



Redakcji

Institucje wspierające targi:



ZARZĄD  
TRANSPORTU  
MIEJSKIEGO  
W KIELCACH

[transexpo.pl](http://transexpo.pl)