Ihor Zanevskyy, Igor Ohirko, Olga Ogirko

Modelowanie i metody rozwiązywania zagadnień transportowych

Skrypt poświęcono modelowaniu systemów transportowych, kładąc szczególny nacisk na problematykę formułowania zadań optymalizacyjnych rozłożenia potoku ruchu na sieć transportową. Przedstawiono w nim zarówno problematykę modelowania systemów transportowych, jak i metodę oceny wielokryterialnej funkcjonowania tych systemów. Publikacja zawiera sformułowania zadań optymalizacyjnych rozłożenia potoku ruchu w aspekcie organizacji ruchu, rozumianej jako sposób wykorzystania wyposażenia systemu transportowego w realizacji zgłaszanego zapotrzebowania na przewóz. Celem pracy było określenie roli i miejsca modelowania i symulacji. Matematyczna gospodarka to jest zestaw metod matematycznych, pozwalających przedstawić teorie i przeanalizować problemy w gospodarce. Mowa matematyki pozwala ekonomistom konkretyzować pozytywne wymogi o spornych czy dokładnych tematach, które byłyby niemożliwe bez matematyki. Dużo z teorii ekonomicznej jest teraz obecne w terminach matematycznych modeli ekonomicznych. Technologia informacyjna stała się podstawą, której poziom rozwoju w dużej mierze decyduje o poziomie rozwoju kraju jako całości.

Pod pojęciem model rozumiemy przedstawienie danego obiektu czy też zjawiska w uproszczonej postaci w stosunku do rzeczywistej. W nauce jest to celowe uproszczenie rzeczywistości polegające na pominięciu cech i szczegółów nieistotnych z punktu widzenia celu modelowania [1, 2]. Przyczyną tworzenia modeli jest nie tylko chęć poznania rzeczywistości, praw nią rządzących, ale także zbadanie możliwości wpływania na otaczające nas zjawiska, badanie zjawisk w innych warunkach i w przyszłości [1]. Zagadnienia transportowe możemy rozpatrywać jako zamknięte lub otwarte. Rozwiązywane może być manualnie lub określonym programem komputerowym. W danym zagadnieniu transportowym wyznaczamy funkcję celu, warunki dla dostawców oraz odbiorców, a także brzegowe. Zagadnienie transportowe w badaniach operacyjnych stanowi procedurę iteracyjną, a rozpoczyna się od początkowego rozwiązania dopuszczalnego. Rozwiązanie to jest następnie poprawiane z punktu widzenia funkcji celu.

Zamknięte zagadnienie transportowe rozwiązujemy przykładowo metodami [3, 4]:

1. Rozpoczęciu wypełniania macierzy przewozów od klatki w lewym górnym rogu, wpisując do niej odpowiadającą mniejszą ilość spośród podaży i popytu.
2. Przesunięciu w prawo, gdy pierwszy towar nie został całkowicie rozdysponowany lub w dół, gdy całą podaż tego dostawcy rozdzielono odbiorcom.
3. Obliczeniu kosztu transportu i następnie poprawianiu macierzy przewozów w kolejnych iteracjach.

Realizacja komputerowa umożliwia zaznaczenie w funkcji celu tras niedopuszczalnych poprzez podanie wielokrotności największego z parametrów funkcji celu w postaci bazowej. Zagadnienie transportowe możemy też rozwiązać stosując dodatek Excel-Solver. Otwarte zagadnienie transportowe sprowadzamy do zamkniętego poprzez wprowadzenie fikcyjnego odbiorcy. Oznacza to, że nadwyżka towaru zostanie w magazynach dostawców. W takim przypadku minimalizuje się łączny koszt transportu i magazynowania.

Czasem zdarza się, że dane zagadnienie transportowe rozwiązywane manualnie nie bilansuje się w tzw. klatkach zerowych po uzyskaniu początkowego rozwiązania dopuszczalnego metodą minimalnego elementu macierzy. Alternatywnym sposobem jest skorzystanie z metody potencjałów, wychodząc z rozwiązania wstępnego uzyskanego metodą minimalnego elementu macierzy, gdzie przykładowo jeden przewóz musimy ulokować w klatce niezerowej. W kolejnym kroku sprawdzamy, czy uzyskano rozwiązanie optymalne, posługując się tzw. zmiennymi dualnymi alfa i beta dla tras bazowych. Następnie tworzymy tabelę pomocniczą, w której dla tras bazowych wpisujemy (X), a dla niebazowych wartości wynikające z odpowiedniego odjęcia od ceny zmiennych dualnych alfa oraz beta. Szukamy wyników (kryteriów) o wartościach ujemnych, a gdy nie występują, mamy już rozwiązanie optymalne. Natomiast, gdy dla klatek niebazowych wystąpi kryterium ujemne, to dokonujemy w pętli przesunięcia odpowiedniego przewozu w kierunku klatki z kryterium ujemnym. Wymaga to jednak zaktualizowania wartości w odpowiadających wierszach i kolumnach macierzy przewozów. Ponownie określamy zmienne dualne dla skorygowanych klatek bazowych, a dla niebazowych obliczamy kryteria. Jeżeli teraz wystąpią kryteria dodatnie, to uzyskaliśmy rozwiązanie optymalne. Przystępujemy zatem do obliczenia łącznego kosztu przewozów według cen jednostkowych macierzy bazowej. Mamy n punktów wysyłających towar i t punktów odbierających. Istnieje droga od każdego dostawcy do każdego odbiorcy i znany jest koszt transportu jednostki towaru [5, 6]. Zapiszmy dane w postaci tabeli (tab. 1).

Wprowadźmy zmienne $x_{i,j}$ opisujące ilość towaru przewożonego od *i*-tego dostawcy do *j*-tego odbiorcy. Niech $a_{i,j}$ oznacza koszt przewiezienia jednostki towaru [5].
Jako funkcję celu przyjmijmy:

$$\min x_o = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} a_{i,j}x_{i,j} \tag{1}$$

Tab. 1. Model popyt–podaż

	O_1	O_2	…	…	O_t	*podaż*
D_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	…	…	$a_{1,t}$	b_1
D_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	…	…	$a_{2,t}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
D_n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	…	…	$a_{n,t}$	b_n
popyt	c_1	c_2	…	…	b_t	

Zadanie transportowe nazywamy zbilansowanym, gdy podaż = popyt, czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{t} c_j$$

W przypadku zbilansowanym obszar dopuszczalny opisany jest następującym układem równań i nierówności:

$\sum_{j=1}^{t} x_{1,j} = b_1$ – pierwszy dostawca wysyła cały towar,

$\sum_{j=1}^{t} x_{2,j} = b_2$ – drugi dostawca wysyła cały towar,

$\vdots$

$\sum_{j=1}^{t} x_{n,j} = b_n$ – *n*-ty dostawca wysyła cały towar,

$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_1$ – pierwszy odbiorca dostaje cały towar,

$\sum_{i=n}^{t} x_{2,j} = c_2$ – drugi odbiorca dostaje cały towar,

$\vdots$

$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_t$ – *t*-ty odbiorca dostaje cały towar.

Ponadto nie można przewozić ujemnej liczby towarów, dlatego:

$$\forall_{1 \le i \le n} \forall_{1 \le j \le t} \quad x_{i,j} \ge 0 \tag{2}$$

Czasami towary są podzielne (jak prąd czy woda), ale zwykle dodajemy warunki:

$$\forall_{i,j} \; x_{i,j} \in Z \tag{3}$$

Jeśli dodamy do siebie równania opisujące popyt otrzymamy:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{4}$$

Analogicznie, jeśli dodamy do siebie równania opisujące podaż, otrzymamy:

$$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{t} c_i \tag{5}$$

Zatem dla zadania niezbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest sprzeczny, zaś dla zadania zbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest zależny. Można pokazać, że rząd macierzy układu jest równy, więc tyle musi być zmiennych bazowych [6].

Zakładamy, że zagadnienie jest zbilansowane. W pierwszej zapisujemy koszty lub koszty zredukowane, czyli to co jest nad kreską w tablicy sympleks. Druga tablica opisuje przewozy – dla zmiennej bazowej wstawiamy ilość towaru przewożonego od *i*-tego dostawcy do *j*-tego odbiorcy, zaś dla zmiennych niebazowych znak x. Ta tablica opisuje to, co jest w tablicy sympleks z prawej strony kreski i umiejscowienie zmiennych bazowych jak w zrewidowanej metodzie sympleks [6, 7].

Typy modeli

Można wyróżnić m.in. następujące typy modeli [5–7]:

- o podobieństwie kinetycznym,
- o podobieństwie geometrycznym, np. makiety, mapy,
- o podobieństwie dynamicznym – stosowane w tunelach aerodynamicznych,

Rys. 1. *Schemat modelu [5]*

- tworzone przez analogie – hydrauliczno-elektryczne,
- matematyczne.

Model matematyczny to zbiór symboli oraz relacji matematycznych wraz z bezwzględnie ścisłymi zasadami operowania nimi. Symbole i relacje odnoszą się do konkretnych elementów rzeczywistości, którą badamy (rys. 1). Model opisuje dane zjawisko za pomocą zmiennych, których wartości mogą należeć do różnorodnych wartości, np. liczb całkowitych, rzeczywistych, wartości logicznych itp. Modelowanie matematyczne to dziedzina, której zadaniem jest opisanie zjawisk w języku matematyki oraz logiki formalnej [5].

Modelowanie matematyczne polega na użyciu języka matematyki w celu opisania jakiegoś układu, np. elektrycznego, ekonomicznego. Wykorzystywane są one przy optymalizacji warunków pracy, prognozowaniu. Modelowanie matematyczne ma zastosowanie w wielu dziedzinach życia, głownie w tych, w których jest powtarzalność lub podobieństwo zdarzeń, czyli w naukach ekonomicznych. Przy użyciu modelowania matematycznego wnioski będą zgodne z rzeczywistością pod warunkiem, że sformułowanie wejściowe było poprawne, założenia poprawne oraz dokładne z punktu widzenia celu, jaki badacz zakłada. Jeśli początkowe hipotezy będą fałszywe, to nie osiągniemy poprawnych wyników [3].

Modele matematyczne są klasyfikowane według różnych kryteriów, na przykład:

1. Ze względu na postać związków przedstawionych w modelu:
   - liniowe – gdy wszystkie operatory są liniowe,
   - nieliniowe – gdy chociaż jeden operator nie jest liniowy.

   Zakwalifikowanie do liniowych lub nieliniowych jest zależne od kontekstu. Z zasady dotyczy wielkości wejściowych, natomiast w przypadku analizy regresji model liniowy oznacza liniowość względem parametrów, zaś nieliniowa może być odpowiedź układu;
2. Ze względu na czas:
   - statyczne – nie uwzględnia się zmian wartości w czasie, z zasady wykorzystywane są równania algebraiczne,
   - dynamiczne – czas jest wartością wejściową, często wykorzystujemy równania różniczkowe.

   Z zasady wszystkie modele rzeczywiste mają charakter dynamiczny. Modelem statycznym można się zadowolić, gdy stosujemy uproszczenie w sytuacji, gdy badamy stany równowagi;
3. Ze względu na związek przyczynowo-skutkowy:
   - deterministyczne – odpowiedź jest jednoznacznie określona dla każdego zbioru wartości wejściowych; dane zjawisko w sposób jednoznaczny wywołuje i wpływa na inne,
   - stochastyczne – odpowiedź ma charakter losowy; wyniki występują z określonym prawdopodobieństwem [6–8].
4. Ze względu na etap tworzenia modelu:
   - wstępny – tworzony, gdy nie znamy jeszcze wszystkich podstawowych mechanizmów procesu. Jego istota polega na wskazaniu jakie dane musimy jeszcze uzyskać,
   - ogólny – zawiera już wszystkie znane badaczowi zależności i procesy, ale techniczne posługiwanie się nim jest skomplikowane,
   - sumaryczny – ostateczna forma symulacji komputerowej. Jest wykorzystywana praktycznie.

Etapy modelowania

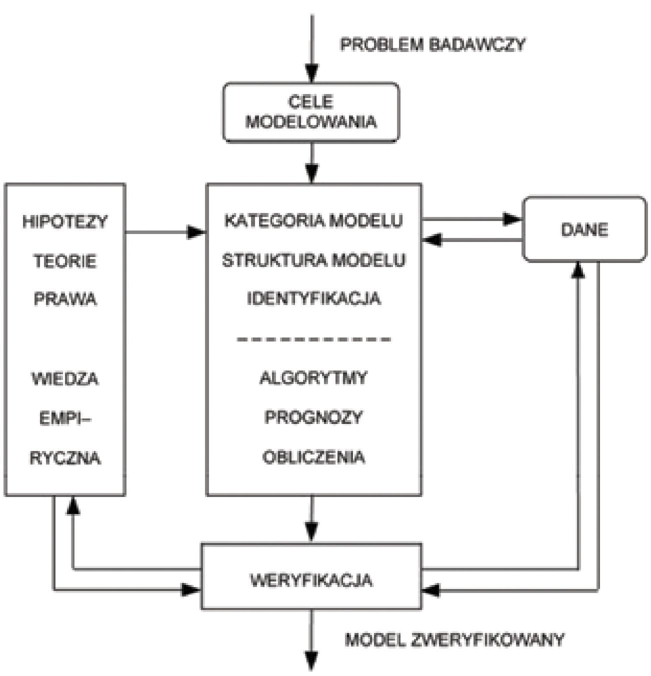
Określimy 5 etapów modelowania: sformułowanie celu modelowania; wybranie kategorii modelu oraz określenie jego struktury; identyfikacja parametrów modelu; algorytmizacja modelu; zweryfikowanie wyników (rys. 2).

Sformułowanie celów modelowania

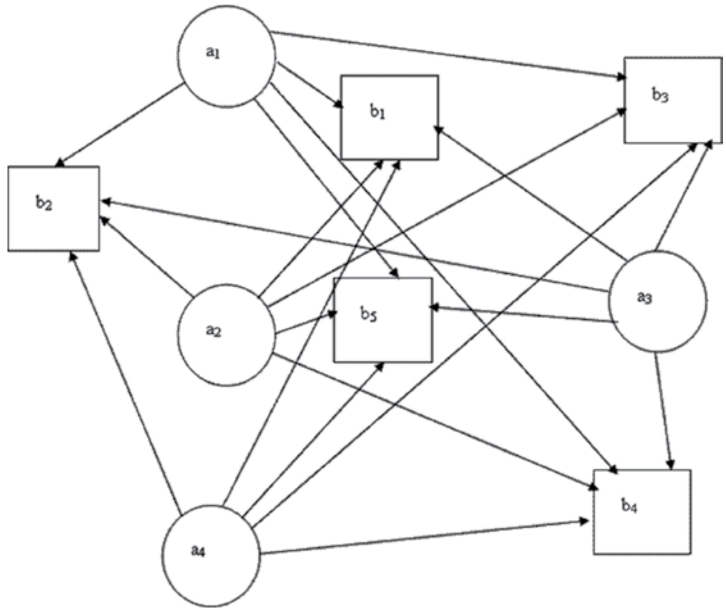
Formułując cel modelowania, należy pamiętać, że jest to proces ukierunkowany celowo. Znaczy to, że tworzony model ma mieć konkretne zastosowanie. W przypadku badań systemowych nadrzędnym celem jest stworzenie narzędzi, które pozwolą przewidzieć, jak zachowa się badany system w innych warunkach niż istniejące aktualnie. Gdyby nie modele, w celu sprawdzenia zachowania się obiektu w zmieniających się warunkach należałoby eksperymentować na rzeczywistym systemie, co jest bardzo kosztowne i czasochłonne, a często wręcz niemożliwe do przeprowadzenia. Z tego wynika, że najważniejsze znaczenie mają modele, przy pomocy których można zbadać zachowanie się systemów, które jeszcze nie istnieją i systemów mających działać w różnorodnych warunkach, w których do tej pory nie występowały.

Wybór kategorii modelu oraz określenie jego struktury

Etap ten nazywany jest modelowaniem właściwym. W tym etapie należy przetworzyć całą istotną dla celów modelowania wiedzę o badanym systemie w zbiór relacji matematyczno-logicznych. Należy pamiętać, że modele matematyczne muszą spełniać dwa podstawowe wymagania: łatwości użytkowania zgodnie z jego przeznaczeniem oraz zgodności z modelowanym systemem odnośnie zależności, które interesują badacza. Często wymagania te mogą być sprzeczne. Należy na tym etapie poszukać kompromisu między nadmiernym uproszczeniem modelu, co może prowadzić do błędnych wniosków a stworzeniem modelu zbyt skomplikowanego, co utrudnia jego stworzenie. W tym etapie należy też rozwiązać problem istotności, czyli wyboru hipotez istotnych, od tych które należy odrzucić. Schemat modeli systemów transportowych pokazano na rys. 3.



Rys. 2. *Etapy budowy modelu matematycznego*



Rys. 3. *Schemat modelowania systemów transportowych*

Identyfikacja parametrów modelu

Ma na celu doświadczalne ustalenie wartości, których wprowadzenie do modelu umożliwi wykonanie potrzebnych obliczeń. Rozróżniamy 2 podstawowe typy wartości liczbowych:

- parametry – współczynniki na stałe ujęte w algorytmie i programie komputerowym, może ich być od kilku do kilkudziesięciu w zależności od stopnia skomplikowania modelu. Określają np. dynamikę przemian,
- dane – określają warunki zewnętrzne modelowanego obiektu, np. temperatura.

Z zasady teoretyczna wiedza nie jest wystarczająca, by nadać modelowi postać, która umożliwi wykonanie obliczeń. Często nie są znane wszystkie wartości liczbowe niektórych parametrów modelu. W takich sytuacjach dokonuje się ich szacunku na podstawie innych ustalonych parametrów. Proces ten nazywany jest estymacją, a oszacowane statystycznie wartości – estymatorami. Proces identyfikacji parametrów połączony z ich estymacją to tzw. kalibracja modelu. Ma zapewnić zgodność predykatywną modelu w warunkach odmiennych od tych, w których został opracowany [7, 8].

Identyfikacja może być bierna lub czynna. Identyfikacja bierna ma na celu wyznaczenie postaci i parametrów modelu poprzez zgromadzenie danych podczas standardowego działania systemu, które poddawane są opracowaniu statystycznemu. Identyfikacja czynna jest droższa i bardziej pracochłonna niż bierna, a niekiedy niemożliwa do przeprowadzenia. Polega na przeprowadzeniu eksperymentów, których wyniki zostaną zastosowane do określenia modelu.

Algorytmizacja modelu

Jest to proces budowy konkretnego algorytmu. Pod pojęciem algorytmu rozumiemy uporządkowany i skończony ciąg jasno sprecyzowanych czynności, które są niezbędne do wykonania zadania. Poprawnie zbudowany algorytm można wykorzystać do rozwiązywania podobnych zadań.

Algorytm musi spełniać 3 podstawowe zasady [4–7]:

1. Liczba operacji jest wielkością skończoną – policzalna liczba operacji wynika z faktu, że przy użyciu algorytmu podczas realizacji zadania, po wykonaniu odpowiedniej ilości czynności,

musi nastąpić jego pomyślne zakończenie. Liczba operacji jest różna w zależności od złożoności modelu.
2. Operacje muszą być zrozumiałe i wykonalne dla realizatora – istotne jest poznanie potencjalnych użytkowników, gdyż każdy posiada inny zasób wiedzy.
3. Poprawna kolejność wykonywania poszczególnych operacji – wynika z logiki odwzorowywanego procesu.

Algorytmy mają różny stopień złożoności. Z tego punktu widzenia wyróżniamy:
- algorytmy proste – poszczególne instrukcje realizowane są tylko raz i wykonywane jedna po drugiej,
- algorytmy złożone – możliwe są alternatywne rozwiązania w zależności od spełnienia określonych warunków,
- algorytmy cykliczne, czyli rekurencyjne – charakteryzują się powtarzaniem sekwencji operacji,
- algorytmy mieszane - występuje jednocześnie rekurencyjność oraz algorytmy złożone.

Weryfikacja wyników

Weryfikacja jest to porównanie wyników modelowania ze stanem rzeczywistym pod kątem zgodności z badaniami doświadczalnymi i wiedzą teoretyczną. Faza ta jest ściśle powiązana z każdym z poprzednich etapów budowy modelu, a zatem powinna odbywać się we wszystkich etapach, nie tylko po ukończeniu całego procesu. Struktura modelu, czyli wewnętrzne powiązania między elementami modelu i modelem a rzeczywistością [3-6] ma zapewnić zgodność modelowanych powiązań z istniejącymi w rzeczywistości i jednocześnie być przyjazna dla użytkownika. Wyróżniamy trzy aspekty zgodności wyników modelowania z rzeczywistością: zgodność heurystyczna – sprawdzana jest poprzez ocenę przydatności modelu do weryfikacji hipotez, interpretacji zjawisk i formułowania zadań badawczych, wartość naukowa; zgodność pragmatyczna – jest oceniana poprzez porównanie wyników modelowania z wielkościami doświadczalnymi. Istotna jest w tym obszarze zgodność predykatywna – bada się ją poprzez wprowadzenie do modelu parametrów z innego okresu czasu lub warunków; zgodność strukturalna – sprawdzana jest możliwość zastosowania modelu do imitacji istniejących w rzeczywistości mechanizmów. Jest szczególnie ważna w przypadku modelowania zjawisk przyrodniczych. W przypadku deterministycznych dynamicznych modeli miarami dopasowania są współczynniki regresji, równania i determinacji. Najlepiej, gdy są bliskie jedności. Z powyższego wynika, że budowa modelu ma charakter iteracyjny. Tworząc strukturę modelu, musimy zwracać uwagę na to, jakie dane są dostępne, jakie mamy możliwości obliczeniowe. Stwierdzenie np. że nie mamy odpowiednich danych, wymaga powrotu do poprzedniego etapu.

Zakończenie

Dzięki matematyce uczymy się logicznego myślenia, co nam pomaga w podejmowaniu przyszłych decyzji [2, 4, 9].

Do wszystkiego w życiu codziennym:
- w informatyce,
- obliczanie kosztów, budżetów,
- inwestycje, planowanie remontów,
- ekonomika obliczeń przy działaniach na ułamkach zwykłych,
- do dokonywania różnego rodzaju obliczeń, porównań, zestawień czy obliczeń statystycznych zestawionych w formie tabelarycznej lub słupkowej przy pomocy programu Excel,
- obliczanie inwestycji długoterminowych,
- prowadzenie różnych statystyk.

Modelowanie matematyczne obecne jest w makro i mikroekonomii, zarządzaniu przedsiębiorstwem, marketingu, logistyce ekonomicznej, ekonomice transportu, zarządzaniu regionalnym i ubezpieczeniach.

W zagadnieniach transportowo-magazynowych interesującym zagadnieniem jest minimalizacja kosztów przewozów. Istniejące systemy informacyjne, wykorzystujące specjalistyczne programy komputerowe, umożliwiają gromadzenie informacji o konsumentach w czasie rzeczywistym oraz modelowanie ich interakcji.

Bibliografia

1. Tokarski T., *Ekonomia matematyczna. Modele mikroekonomiczne*, WNT, Warszawa 2011.
2. GERBER H.U., *Life insurance mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 1990.
3. Kulapa W., *Matematyczne aspekty ekonomii*, Wydawnictwo Uniwersytetu Kardynała Stefana Wyszyńskiego, Warszawa 2008.
4. Kordzikowski H., *Umowa ubezpieczenia życiowego*, Faktor, Wrocław 1999.
5. Sangowski T., *Ubezpieczenia gospodarcze*, Poltext, Warszawa 1998.
6. Bednarski T., *Elementy matematyki w naukach ekonomicznych*, Oficyna Ekonomiczna, Warszawa 2004.
7. Kanas S., *Podstawy ekonomii matematycznej*, Wyd. PWN, Warszawa 2011.
8. Panek E., *Ekonomia matematyczna*, Akademia Ekonomiczna, Poznań 2003.
9. Ohirko I., Zaniewski I., Ogirko O., *Modelowanie i symulacja w naukach ekonomicznych*, „Autobusy – Technika, Eksploatacja, Systemy Transportowe” 2016, nr 6.

Autorzy:

prof. dr hab. **Ihor Zanevskyy** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu
dr **Olga Ogirko** – Państwowy Uniwersytet Spraw Wewnętrznych we Lwowie
prof. dr hab. **Igor Ohirko** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu

Modeling and methods of solving of transport problems

The script is devoted to modeling transport systems, with particular emphasis on the problem of formulating optimization tasks for the distribution of traffic to the transport network. It presents both the problem of modeling transport systems and the method of evaluating multicriteria functioning of these systems. The publication contains the formulation of tasks of optimization of the flow of traffic in the aspect of traffic organization, understood as the way of using the equipment of the transport system in realization of the demand for transport. The purpose of the work was to define the role and place of modeling and simulation. The mathematical economy is a set of mathematical methods that allow you to present theories and analyze problems in the economy. Math talk allows economists to make concrete, positive demands on disputable or precise subjects that would have been impossible without mathematics. Much of the economic theory is now present in terms of mathematical economic models. Information technology becomes basic and their level of development largely determines the level of development of the country as a whole.