ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ФІЗИЧНОЇ КУЛЬТУРИ

Кафедра інформатики та кінезіології

Мостова М. Р.

<u>ОСНОВИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ</u>

Лекція з навчальної дисципліни

„ВИЩА МАТЕМАТИКА”

Для студентів спеціальностей 242 Туризм, 241 Готельно-ресторанна справа, 073 Менеджмент

“ЗАТВЕРДЖЕНО”

на засіданні кафедри інформатики

та кінезіології

„31” серпня 2018 р. протокол № 1

Зав.каф _____________ І. П. Заневський

Лекція 1. Основи лінійної алгебри

План

1.1 Матриці та операції над ними

1.1.1 Поняття і види матриць

1.1.2 Дії над матрицями

1.1.3 Властивості дій над матрицями

1.2 Визначники та їх властивості

1.2.1 Визначники 2-го і 3-го порядків

1.2.2 Визначник n-го порядку. Поняття мінора та алгебраїчного доповнення

1.2.3 Властивості визначників

1.2.4 Обернена матриця

1.2.5 Ранг матриці

1.1.1 Поняття і види матриць

Матрицею називається сукупність чисел, розташованих у вигляді прямокутної таблиці з m рядків і n стовпців:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; . \; . \; . \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . \; . \; . \; a_{2n} \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} \; . \; . \; . \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{13}, ..., a_{ij}, ..., a_{mn}$, що складають матрицю, називаються ***елементами*** матриці. Індекс i в елементі a_{ij} позначає номер рядка, а j – стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Матриця, яка має m рядків і n стовпців, називається *матрицею* ***розміру m×n***.

Коротко матриці позначають великими літерами *A, B* або (a_{ij}) чи $(a_{ij})_{m\times n}$, де $i = 1,...,m$, а $j = 1,...,n$, тобто

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; . \; . \; . \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . \; . \; . \; a_{2n} \\ \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} \; . \; . \; . \; a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матриця, у якої всього один рядок, називається ***матрицею-рядком*** і позначається

$$(a_{11} \; a_{12} \; ... \; a_{1n}).$$

Матриця, у якої всього один стовпець називається ***матрицею-стовпцем*** і позначається

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців $(m = n)$, називається ***квадратною***. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її ***порядком***.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . \ . \ . \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ . \ . \ . \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Елементи a_{11}, a_{22}, ... , a_{nn} квадратної матриці утворюють **головну діагональ** матриці, а елементи a_{1n} , $a_{2(n\text{-}1)}$, ... , a_{n1} – **побічну діагональ** матриці.

Квадратна матриця називається ***симетричною***, якщо $a_{ik} = a_{ki}$, тобто симетричні відносно головної діагоналі елементи рівні між собою.

Квадратна матриця називається ***діагональною***, якщо всі її елементи, що не належать головній діагоналі, дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 . \ . \ . 0 \\ 0 & a_{22} . \ . \ . \ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 & 0 . \ . \ . \ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається ***одиничною*** і позначається буквою *E*. Наприклад, одинична матриця третього порядку має вигляд

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нульовою називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою *O*:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Трикутною матрицею називається квадратна матриця, всі елементи якої, що розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Розрізняють матриці ***трикутні зверху*** і ***трикутні знизу:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . \ a_{1n} \\ 0 & a_{22} . \ . \ . \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 0 & 0 . \ . \ . \ a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \ . \ . \ . \ 0 \\ a_{21} & a_{22} . \ . \ . \ 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ . \ . \ . \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриці довільних розмірів $(m \times n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

де $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1,..., m)$ називаються ***східчастими (трапецевидними або квазітрикутними) матрицями***.

Дві матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ та $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називаються ***рівними***, якщо вони мають однаковий розмір і рівні між собою відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$ для будь-яких *i* та *j*.

Матриця, отримана з даної матриці $A = (a_{ij})_{m\times n}$ заміною її рядків стовпцями з тими ж номерами, називається ***транспонованою,*** а сама операція знаходження транспонованої матриці – ***транспонуванням***. Транспоновану матрицю позначають $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$.

1.1.2 Дії над матрицями

Операції додавання і віднімання матриць вводяться тільки для матриць однакового розміру.

1. Додавання. ***Сумою*** *A+B* двох матриць $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементами якої є суми відповідних елементів матриць, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ де } i = 1...m,\ j = 1...n.$$

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Віднімання. ***Різницею*** *A-B* двох матриць $A = (a_{ij})_{m\times n}$ і $B = (b_{ij})_{m\times n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, елементами якої є різниці відповідних елементів матриць, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}, \text{ де } i = 1...m,\ j = 1...n.$$

3. Множення на число. ***Добутком αA матриці*** $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ***на дійсне число α*** (або числа α на матрицю *A*) називається матриця $C = (c_{ij})_{m\times n}$, кожний елемент якої дорівнює відповідному елементу матриці *A* помноженому на число α, тобто

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \text{ де } i = 1...m,\ j = 1...n.$$

Наприклад,

$$2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Справедливі такі властивості операцій:

а) $A + B = B + A$ — *комутативність відносно додавання матриць*;

б) $A + (B + C) = (A + B) + C$ — *асоціативність відносно додавання матриць;*

в) $A + O = A$; $A - A = O$ — *роль нульової матриці* в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$ — *асоціативність відносно множення на число*;

д) $\alpha(A \pm B) = \alpha A \pm \alpha B$ — *дистрибутивність множення на число відносно додавання (віднімання) матриць;*

е) $(\alpha \pm \beta)A = \alpha A \pm \beta A$ — *дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання (віднімання) чисел.*

є) $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$; $(\alpha A \pm \beta B)^T = \alpha A^T \pm \beta B^T$; $(A^T)^T = A$.

4. Множення двох матриць. Операція множення двох матриць вводиться лише для узгоджених матриць. Матриця A називається ***узгодженою*** з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Якщо ця умова не виконується, тобто матриці неузгоджені, то множення таких матриць неможливе.

З узгодженості матриці A з B не випливає, взагалі кажучи, узгодженість матриці B з A, а значить з того, що можна помножити $A \cdot B$ не випливає, що можна помножити $B \cdot A$.

Квадратні матриці одного порядку взаємно узгоджені.

Добутком $A \cdot B$ матриці $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на матрицю $B = (b_{ij})_{n \times l}$ називається така матриця $C = (c_{ij})_{m \times l}$, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, l.$$

Це означення називають правилом множення рядка на стовпець.

Операція множення матриць не є комутативною, тобто $AB \neq BA$.

Матриці A і B називаються перестановними або комутативними, якщо виконується рівність $AB = BA$.

Операція множення матриць має такі властивості (за умови, що вказані операції мають зміст):

а) $(AB)C = A(BC)$;
б) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$;
в) $(A + B)C = AC + BC$;
г) $C(A + B) = CA + CB$;
д) $A \cdot O = O \cdot A = O$;
е) $AE = EA = A$;
є) $(AB)^T = B^T A^T$.

1.2 Визначники та їх властивості

1.2.1 Визначники 2-го і 3-го порядків

Будь-якій квадратній матриці порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . \ . \ . \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ . \ . \ . \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність певне число, яке називається визначником (детермінантом) n-го порядку цієї матриці і позначається символом det A. За означенням

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ . \ . \ . \ a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ . \ . \ . \ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ . \ . \ . \ a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником першого порядку матриці $A = (a_{11})$ є число рівне величині елемента матриці: $\det A = a_{11}$.

Визначником другого порядку називається число, яке визначається формулою:

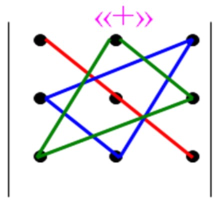
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

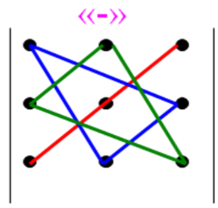
Ця формула є ***правилом обчислення визначника другого порядку***: визначник другого порядку дорівнює різниці добутку елементів, які стоять на головній діагоналі і добутку елементів, які стоять на побічній діагоналі.

Визначником третього порядку називається число

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \ a_{13}a_{21}a_{32} \text{-} \ a_{13}a_{22}a_{31} \text{-} a_{11}a_{23}a_{32} \text{-} a_{12}a_{21}a_{33}$$

Визначник третього порядку обчислюють за ***правилом трикутника (правило Саррюса):*** це алгебраїчна сума шести потрійних добутків елементів, що стоять в різних рядках і різних стовпцях. Три додатних члена визначника третього порядку є добутками елементів головної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Три його від'ємних члена є добуткоами елементів побічної діагоналі і елементів, що знаходяться в вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні до побічної діагоналі.





1.2.2 Визначник n-го порядку. Поняття мінора та алгебраїчного доповнення

Визначником n-го порядку матриці A називається алгебраїчна сума $n!$ доданків, кожний з яких є добутком n елементів визначника, взятих точно по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці A.

Розглянемо загальне правило обчислення визначників n-го порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} називається визначник (n-1)-го порядку, отриманний викресленням з визначника n-го порядку елементів i –го рядка та j-го стовпця, на перетині яких знаходиться цей елемент, i, j=1..n.

Приклад: Для матриці

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & -8 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix},$$

знайдемо мінор елемента a_{23}:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 3 - 1\cdot 0 = -6$$

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} називається число

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Можливість обчислювати визначники будь-якого порядку дає теорема Лапласа або теорема розкладу:

Теорема 1. Визначник n-го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів довільного рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення

$$|A| = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in},\ i=1..n.$$

Для визначника третього порядку за цією теоремою виконуються такі рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad \Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \qquad \Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \qquad \Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

Теорема 2. Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка, чи стовпця дорівнює нулю.

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) +$$
$$+ a_{12}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) - a_{13}\left(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}\right) = 0.$$

1.2.3 Властивості визначників

1. Визначник матриці A дорівнює визначнику транспонованої матриці $|A| = |A^T|$. (Ця властивість означає, що над рядками і стовпцями можна виконувати однакові дії.)
2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки (стовпці), то він змінить знак на протилежний.
3. Визначник, у якого два рядки (стовпці) співпадають, дорівнює 0.
4. Загальний (спільний) множник всіх елементів рядка визначника можна винести за знак цього визначника та навпаки, на спільний множник визначника можна помножити будь-який рядок чи стовпець.
5. Якщо всі елементи деякого рядка(стовпця) визначника дорівнюють 0, то він дорівнює 0.

6. Якщо елементи двох рядків(стовпців) визначника пропорційні, то визначник дорівнює 0.
7. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інший другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

   Наслідок. Якщо рядок (стовпець) є лінійною комбінацією будь-яких двох чи більше рядків (стовпців), то визначник дорівнює нулю.
8. Значення визначника не зміниться, якщо до елементів його рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне і те ж число *k*.
9. Сума добутків довільних чисел b_1 , b_2 , ..., b_n на алгебраїчні доповнення елементів деякого рядка(стовпця) квадратної матриці порядку n дорівнює визначнику матриці, отриманої з даної заміною елементів цього рядка(стовпця) числами b_1 , b_2 , ..., b_n .
10. Визначник добутку двох квадратних матриць одного порядку дорівнює добутку визначників цих матриць.

1.2.4 Обернена матриця

Нехай *A* — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці *A*, якщо виконується умова

$$A A^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Квадратна матриця *A* називається ***виродженою***, якщо det $A=0$, і ***невиродженою***, якщо det $A \neq 0$.

Теорема 3. Для існування оберненої матриці A^{-1} *необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою.*

Н е о б х і д н і с т ь . Нехай обернена матриця A^{-1} існує, тоді $AA^{-1}=E$. Застосовуючи правило знаходження визначника добутку двох матриць, маємо

$$\det A \bullet \det A^{-1} = 1, \text{ тому } \det A \neq 0.$$

Д о с т а т н і с т ь . Нехай det $A \neq 0$, тоді матриця *A* має обернену матрицю A^{-1} причому

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\,.\,.\,.\,a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}.\,.\,.\,a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1} & a_{m2}\,.\,.\,.\,a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \, . \, . \, . \, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} . \, . \, . \, a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \, . \, . \, . \, a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Дійсно, добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$ матриць (1) і (2) дорівнюють матриці, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці (за теоремою 1), а всі недіагональні елементи — нулю (за теоремою 2). Отже, $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Покажемо, що A^{-1}— єдина обернена матриця. Нехай A" — ще одна обернена матриця, тоді

$$A^{-1} = A^{-1}E = A^{-1}(AA'') = (A^{-1}A)A'' = EA'' = A''.$$

1.2.5 Ранг матриці

Нехай задано матрицю A_{mxn}= A. Виділимо в матриці А будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де k — число, не більше від чисел m і n, тобто $k \leq \mathit{min}$ (m, n).

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називається *мінором* k-го порядку матриці А.

Рангом r (А) матриці А називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Безпосередньо з означення випливає, що:

1) ранг існує для будь-якої матриці A_{mxn}, причому

$$0 \leq r\,(A) \leq \mathit{min}(m, n);$$

2) r (А) = 0 тоді і тільки тоді, коли А = 0;

3) для квадратної матриці n-го порядку ранг дорівнює n тоді і тільки тоді, коли матриця невироджена.

Для того, щоб знайти ранг матриці потрібно виконати наступні дії. Якщо всі мінори першого порядку (елементи матриці) дорівнюють нулю, то r = 0. Якщо хоч один з мінорів першого порядку відмінний від нуля, а всі мінори другого порядку дорівнюють нулю, то r = 1. У випадку, коли є мінор другого порядку, відмінний від нуля, досліджуємо мінори третього порядку. Так продовжуємо доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінорів порядку k не існує, тоді r = k – 1.

Вказаний метод знаходження рангу матриці не завжди зручний, тому що пов'язаний з обчисленням значного числа визначників. Простіший метод грунтується на елементарних перетвореннях матриці.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні операції:

а) перестановка двох рядків матриці;

б) множення рядка на число $\alpha \neq 0$;

в) додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, помноженого на число $\alpha \neq 0$;

г) транспонування матриці.

Елементарні перетворення матриці не змінюють її рангу. Тому при обчисленні рангу матриці, вона за допомогою елементарних перетворень зводиться до східчастого вигляду - матриці *B*, ранг якої легко знаходиться.

Якщо *A*=rang *B*, то *A*~*B*.

Рекомендована література

Основна:

1. Дубовик В. П. Вища математика : навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик.– К. : А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Барковський В. В. Вища математика для економістів : навч. посібник / В. В. Барковський, Н. В Барковська. – [5-те вид.]. – К. : Центр учбової літератури, 2010. – 448 с.
3. Вища математика : підручник / [В. А. Домбровський, І. М. Крижанівський, Р.С. Мацьків та ін.] ; за ред. М. І. Шинкарика. – Тернопіль : Вид-во Карп'юка, 2003. – 480 с.
4. Вища математика у прикладах і задачах для економістів [Електронний ресурс] : навч. посібник / А. М. Алілуйко, Н. В. Дзюбановська, О. Ф. Лесик [та ін.]. – Тернопіль : ТНЕУ, 2017. – 148 с.

Допоміжна:

5. Дюженкова Л. І. Вища математика : практикум: навч. посібник / Л. І. Дюженкова , Т. В. Посаль. — К. : Вища шк., 1991.

Інформаційні ресурси інтернет

1. Examples for mathematics : wolfram alpha [Electronic resource]. – Regime of access: https://www.wolframalpha.com/examples/mathematics/